Progettazione di Reti di Distribuzione

5. *Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP*

5.1. Generalità

- Scegliere la *localizzazione* di "*facility*" (impianti industriali, magazzini, ecc.) in modo da minimizzare il costo (o massimizzare il profitto) per soddisfare la domanda di un qualche bene, sapendo che in generale i costi sono quelli fissi derivanti dall'installazione delle facility e quelli di trasporto per distribuire i beni dagli impianti ai clienti.

- Questo problema è noto nella letteratura come *plant location problem* ovvero *facility location problem* e a seconda che ciascuna potenziale facility ha una capacità finita o meno il problema è chiamato *Capacitated Facility Location Problem* (*CFLP*) ovvero *Uncapacitated Facility Location Problem* (*UFLP*)

➢ Consideriamo il *caso non capacitato* (*UFLP*)

- Sono dati un *insieme* J di n *impianti* (che nel nostro caso corrispondono ai magazzini) e un *insieme* I di m *clienti* (nel nostro caso mercati) che devono essere riforniti dagli impianti

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.2. Definizione

- Ogni impianto j ha un *costo fisso di attivazione* f_j, e un *profitto* π_{ij} che deriva dal soddisfacimento della domanda del cliente i da parte dell'impianto j.

- Tipicamente π_{ij} è *funzione* dei seguenti *parametri*:
  - q_j: costo di produzione unitario per l'impianto j
  - t_{ij}: costo di trasporto unitario dall'impianto j al cliente i
  - p_i: prezzo di vendita al cliente i
  - d_i: domanda del cliente i

  Un esempio tipico è $\pi_{ij} = d_i\,(p_i - q_j - t_{ij})$.

- Il problema decisionale è *stabilire quali impianti attivare in modo da soddisfare le domande dei clienti e massimizzare il profitto totale*

- Pertanto, le *decisioni* da intraprendere sono:

  a) quali impianti attivare (*localizzazione*)

  b) come ripartire la domanda dei clienti sugli impianti attivati (*allocazione*),

  in modo da *massimizzare i profitti* (differenza tra ricavi vendite e costi variabili/fissi impianti)

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.3. Formulazione

Osservazione 1

- Un'*istanza* del problema è definita dagli *interi* n ed m, dalla *matrice dei profitti* $\{\pi_{ij}\}$ e dal *vettore dei costi fissi* $\{f_j\}$, dove $f_j > 0$ per ogni j altrimenti converrebbe comunque attivare l'impianto j.

Osservazione 2

- Per un *dato insieme* $S \subseteq J$ *di impianti attivati* la *soluzione ottima è quella per cui ogni cliente* i *è rifornito dall'impianto* $j_i = \text{arg-max}_{j \in S}\, [\pi_{ij}]$.
- Vale la proprietà di *single sourcing* (*assignment*)
- Pertanto, *dato* S il *profitto totale* è

$$z(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} [\pi_{ij}] - \sum_{j \in S} f_j$$

- Il problema consiste quindi nel *determinare insieme* $S \subseteq J$ *di impianti attivati* per cui si ha

$$z^* = \max_{S \subseteq J} z(S)$$

Questa è la *formulazione compatta*.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.3. Formulazione

Esempio

- Si considerino la seguente *matrice* dei *profitti*

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad |J| = 5;\ |I| = 6$$

- e il seguente *vettore* dei *costi fissi*

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

- Una *soluzione* (ammissibile) è
  - $S = \{1, 2, 4\}$ di *valore* $z(S) = (13 + 8 + 6 + 10 + 10 + 4) - (4 + 3 + 4) = 51 - 11 = 40$

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.3. Formulazione (segue)

- Una *formulazione* in termini di problema di *PLI* è

(UFL)

$$\max \quad \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\pi_{ij}y_{ij} - \sum_{j\in J} f_j x_j \qquad \text{(a)}$$

s.t.

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \qquad \text{(b)}$$

$$y_{ij} \le x_j, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \qquad \text{(c)}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \forall i \in I, \forall j \in J; \quad x_j \in \{0,1\}, \forall j \in J \qquad \text{(d)}$$

dove x_j è la *variabile decisionale di attivazione dell'impianto* j, e y_{ij} è la *variabile decisionale di allocazione* del cliente i all'impianto j

- I vincoli (b) garantiscono che la *domanda di ogni cliente viene soddisfatta*.

- I vincoli (c) garantiscono che i *clienti sono serviti solo da impianti attivati*.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.3. Formulazione (segue)

Osservazione 3

- A causa del vincolo (b), se π_{ij} viene sostituito da π'_{ij} con $\pi'_{ij} = \pi_{ij} + c_i$, $\forall\ j \in J$, allora il profitto di ogni soluzione ammissibile varia a causa di c_i.

- Pertanto è possibile aggiungere una costante in ogni riga della matrice $\{\pi_{ij}\}$ senza che sia modificato l'insieme delle soluzioni ottime.

- Poiché in particolare il prezzo di vendita al cliente i è una costante aggiunta nella riga i della matrice $\{\pi_{ij}\}$, ne consegue che *solo i costi di produzione e trasporto* (oltre a quelli fissi) sono rilevanti nel prendere le decisioni.

- Le considerazioni precedenti spiegano perché nella letteratura UFLP è formulato spesso come:

$$\min \quad \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} c_{ij} y_{ij} + \sum_{j \in J} f_j x_j \qquad \text{(a')}$$

  con i vincoli (b), (c), (d), dove c_{ij} è il costo complessivo (produzione + trasporto) derivante dal servire il cliente i da parte dell'impianto j.
  Nel nostro caso $c_{ij} = -\pi_{ij}$.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.3. Formulazione (segue)

Osservazione 4

- Nella formulazione (a)÷(d) una volta specificati i valori di x_j che soddisfano i vincoli (d) è immediato trovare i valori di y_{ij} che soddisfano il problema di ottimizzazione per i fissati x_j.

- Infatti anche eliminando il vincolo di interezza di y_{ij}, l'insieme di valori ottimali è dato da $y^*_{ij_i} = 1$, $y^*_{ij} = 0$ per $j \neq j_i$, dove $j_i = \text{arg-max}_{j \in J} \{\pi_{ij} : x^*_j = 1\}$.

- Pertanto i vincoli (d) possono essere sostituiti da

$$y_{ij} \geq 0, \forall i \in I, \forall j \in J; \quad x_j \in \{0, 1\}, \forall j \in J \qquad \text{(d')}$$

- La formulazione (a)÷(d') è di PLI mista.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.3. Formulazione (segue)

Osservazione 5

- Se nella formulazione (UFL) si sostituiscono i vincoli (c) con il seguente insieme di vincoli (surrogati)

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq m x_j, \quad \forall j \in J \qquad \text{(c')}$$

si ottiene una *formulazione* di *PLI equivalente*.

(AUFL)

$$\max \quad \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \pi_{ij} y_{ij} - \sum_{j \in J} f_j x_j \qquad \text{(a)}$$

s.t.

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \qquad \text{(b)}$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq m x_j, \quad \forall j \in J \qquad \text{(c')}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in I, \forall j \in J; \quad x_j \in \{0, 1\}, \forall j \in J \qquad \text{(d)}$$

Infatti quando $x_j = 0$ entrambi i vincoli (c) e (c') implicano che $y_{ij} = 0$, $\forall\ i \in I$; quando $x_j = 1$ i vincoli (c) e (c') sono entrambi soddisfatti per tutte le scelte di y_{ij} che soddisfano i vincoli (b).

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

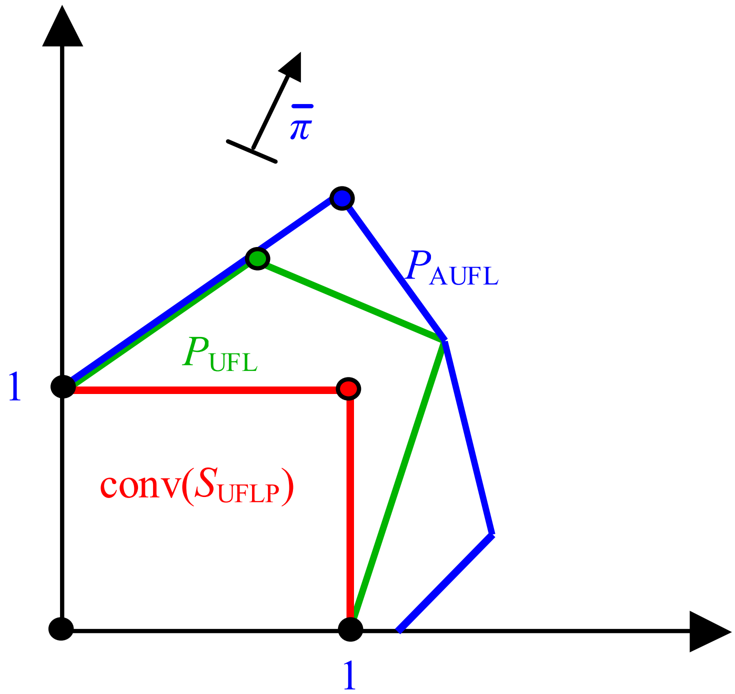
5.3. Formulazione (segue)

- Si risparmia sul numero di vincoli

Tuttavia:

Teorema. Il rilassamento lineare RL(AUFL) di (AUFL) definisce un poliedro P_{AUFL} che contiene il poliedro P_{UFL} definito dal rilassamento lineare RL(UFL) di (UFL) (contenente a sua volta il guscio convesso $\text{conv}(S_{\text{UFLP}})$ delle soluzioni ammissibili di UFLP)

$$\text{conv}(S_{\text{UFLP}}) \subseteq P_{\text{UFL}} \subset P_{\text{AUFL}}$$



5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.3. Formulazione (segue)

Dim.: Il fatto che P_{UFL} è contenuto in P_{AUFL} segue da:

$$y_{ij} \le x_j, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \Rightarrow \sum_{i \in I} y_{ij} \le m x_j, \quad \forall j \in J$$

Il fatto che ciò valga in senso stretto segue osservando che la soluzione con:

$$y_{11} = 1;\ y_{i1} = 0,\ i \in I \backslash \{1\};$$
$$x_1 = 1/m$$

appartiene a P_{AUFL} in quanto soddisfa il vincolo:

$$\sum_{i \in I} y_{i1} \le m x_1,$$

ma non a P_{UFL} in quanto il vincolo

$$y_{11} \le x_1$$

non è soddisfatto.

- Il rilassamento lineare di (AUFL) fornisce un *bound peggiore* sulla soluzione ottima di UFLP

$$z^*(\mathrm{UFLP}) \le z^*(\mathrm{RL(UFL)}) \le z^*(\mathrm{RL(AUFL)})$$

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.3. Formulazione (segue)

Osservazione 6

- Nel UFLP occorre *determinare* il *numero* di *impianti* da *attivare* e la *loro localizzazione*.
- Talvolta invece può accadere che il numero p di impianti da attivare (con $1 \leq p \leq n$) è un parametro del problema.
- In questo caso alla formulazione (UFL) occorre aggiungere il vincolo seguente:

$$\sum_{j \in J} x_j = p \qquad \text{(f)}$$

nel caso sia richiesto di aprire esattamente p impianti, oppure

$$\sum_{j \in J} x_j \leq p \qquad \text{(f')}$$

nel caso sia richiesto di aprirne al più p.

- La formulazione (UFL + (f')) è quella del p-UFLP.
- La formulazione (UFL + (f)) con $f_j = 0 \ \forall j \in J$ è quella del p-mediano.

Progettazione di Reti di Distribuzione

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.4. Altre applicazioni

- Oltre alle classiche applicazioni UFLP ha svariate altre applicazioni quali ad esempio:
  - Localizzazione di conto-correnti bancari
  - Clustering analysis
  - Localizzazione di piattaforme per trivellazioni nel mare
  - Gestione del portafoglio
  - Progetto di reti di comunicazione
  - Scheduling su macchine
  - Information retrieval
  - …

Progettazione di Reti di Distribuzione

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.4. Altre applicazioni (segue)

Localizzazione di conto-correnti bancari

- *Definizioni del problema*
  - Poiché il numero di giorni richiesti per trasferire un assegno emesso in una banca della città j dipende anche dalla città i dove l'assegno viene incassato, una società che paga i fornitori dislocati in differenti località può trovare vantaggioso scegliere in modo strategico le banche dove avere dei conto-correnti con l'obiettivo di massimizzare i fondi disponibili.

    In particolare la società tende a pagare i fornitori di una città i attraverso una banca della città j che ha il più grande numero di giorni di trasferimento. Per le grandi "corporations" questa strategia ha un rilevante significato economico.
- *Dati del problema*
  - Sia $I = \{1, \ldots, m\}$ l'insieme delle località dei fornitori e $J = \{1, \ldots, n\}$ l'insieme delle potenziali localizzazioni dei conto-correnti, f_j il costo fisso del conto-corrente nella città j, d_i il volume di danaro pagato nella città i e φ_{ij} il numero di giorni (espressi in valore monetario) necessari per svincolare un assegno emesso nella città j che deve essere incassato nella città i.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.4. Altre applicazioni (segue)

- *Formulazione del problema*

  - Assumendo che tutte queste informazioni siano note il problema si può formulare come segue:

  - Sia:

$$\pi_{ij} = d_i \ \varphi_{ij}$$

il valore del vantaggio per la società derivante dal pagamento dei fornitori della città i attraverso un conto aperto in una banca localizzata nella città j.

  - Si considerino le seguenti variabili decisionali

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il conto è aperto nella città } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il fornitore nella città } i \text{ è pagato} \\ & \quad \text{attraverso una banca della città } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  - Il problema può quindi essere formulato tramite la formulazione (UFL) di UFLP

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.5 Complessità

Teorema

- UFLP è *NP-hard in senso forte*.

Dim.:

- Trasformazione polinomiale da VERTEX COVER, problema NP-completo (Karp, 1972), a UFLP.
- VERTEX COVER (VC)

  Istanza: Grafo $G = (V, E)$ e un intero positivo $K \leq |V|$.

  Domanda: Esiste un sottoinsieme $W \subseteq V$ tale che $|W| \leq K$, e per ogni $(u, v) \in E$ almeno u o v appartiene a W?

- Dato $G = (V, E)$, costruiamo questa istanza di UFLP:
  - $J \equiv V$ è l'insieme dei *potenziali siti* per gli *impianti*
  - $I \equiv E$ è l'insieme dei *clienti*
  - $\pi_{ij} = 2$ se $v_j \in V$ è incidente a $e_i \in E$; $\pi_{ij} = 0$ altrimenti
  - $f_j = 1$ per ogni $v_j \in V$
- Risolvere l'istanza di UFLP così definita consiste in $\max_{S\subseteq J} \{\Sigma_i \max_{j\in S} [\pi_{ij}] - \Sigma_{j\in S} f_j\} = \max_{S\subseteq V} \{2|E| - \Sigma_{j\in S} f_j : S \subseteq V$ è una *copertura* di $E\} \equiv \min_{S\subseteq V} \{\Sigma_{j\in S} f_j : S \subseteq V$ è una *copertura* di $E\}$, cioè risolvere il problema del VERTEX COVER su G.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.6 Algoritmi di risoluzione: generalità

- Esiste una letteratura ampia sui metodi di soluzione.
- I principali sono:
  - algoritmi euristici: greedy e di scambio
  - formulazioni di PLI mista:
    - algoritmi di decomposizione (Benders 1962, Balinski e Wolfe 1963)
  - algoritmi di branch e bound: (Efroymson e Ray 1966, Revelle e Swain 1970)
  - algoritmi duali: (Erlenkotter 1978)
- Nel seguito sono esaminati in dettaglio alcuni algoritmi euristici.
- Esamineremo sia algoritmi primali che algoritmi duali.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.7 Algoritmi euristici primali

- Algoritmi primali: *greedy* e di *scambio* si basano sulla seguente *osservazione preliminare*:
- La *formulazione compatta* del UFLP

$$z^* = \max_{S \subseteq J} z(S)$$

dove

$$z(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S}[\pi_{ij}] - \sum_{j \in S} f_j$$

permette di inquadrare il problema come un problema primale condensato che dipende solo dagli insiemi $S \subseteq J$

- Se scegliamo infatti $S \subseteq J$

$$x_j = \begin{cases} 1, & \forall j \in S \\ 0, & \forall j \in J \setminus S \end{cases}$$

il problema diventa

$$z(S) = \max \quad \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \pi_{ij} y_{ij} - \sum_{j \in S} f_j$$

s.t.

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I$$

$$y_{ij} = 0, \quad \forall i \in I, \forall j \notin S$$

$$y_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in I, \forall j \in S$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in I, \forall j \in J$$

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.7 Algoritmi euristici primali (segue)

- Occorre quindi *soddisfare* il *vincolo*

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = \sum_{j \in S} y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I$$

ossia, per ogni i, porre uguale a 1 una variabile y_{ij}, per $j \in S$, in modo da *massimizzare*

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \pi_{ij} y_{ij}$$

- Ovviamente la *scelta migliore* per ogni $i \in I$ è:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & j = j_i = \text{arg-max}_{j \in S} \{\pi_{ij}\} \\ 0, & \forall j \in S \setminus \{j_i\} \end{cases}$$

- La funzione obiettivo si può quindi scrivere

$$z(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} [\pi_{ij}] - \sum_{j \in S} f_j$$

pertanto, ponendo $x_j = 1$, per $j \in S \subseteq J$, è possibile calcolare facilmente il valore della funzione obiettivo.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.7 Algoritmi euristici primali (segue)

Algoritmo greedy (avido, ghiotto)

- Questo algoritmo parte con nessun impianto attivato ($S^0 = \varnothing$). Ad ogni iterazione, dato l'insieme S di impianti attivi, si aggiunge ad S quell'impianto $j \notin S$ che dà luogo al massimo incremento possibile
$$\rho_j(S) = z(S \cup \{j\}) - z(S)$$
della funzione obiettivo $z(\bullet)$.
- Se nessun impianto $j \notin S$ provoca un incremento di $z(\bullet)$ allora l'algoritmo si arresta e l'ultimo insieme S è la soluzione finale.
- Più formalmente la procedura è la seguente:

Iniz.:

$$S^0 = \varnothing; \qquad t = 1; \qquad z(\varnothing) = 0$$

Iter. t:

(1) Trova $j^t = \text{arg-max}_{j \in J \setminus S^{t-1}} [z(S^{t-1} \cup \{j\})]$
$= \text{arg-max}_{j \in J \setminus S^{t-1}} [\rho_j(S^{t-1})]$

(2) Se $z(S^{t-1} \cup \{j^t\}) \le z(S^{t-1})$, STOP ($S^{t-1}$ è la soluzione).

(3) Altrimenti, sia $S^t = (S^{t-1} \cup \{j^t\})$.

(4) Se $S^t = J$, STOP ($S^t = J$ è la soluzione).

(5) Altrimenti, sia $t = t + 1$, e torna a (1).

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.7 Algoritmi euristici primali (segue)

- *Esempio 1*: data la matrice dei profitti e il vettore dei costi fissi

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad |J| = 5;\ |I| = 6$$

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

- *Algoritmo greedy*

$S^0 = \varnothing;\ \ t = 1;\ \ z(\varnothing) = 0$

j:	1	2	3	4	5
$z(S^0 \cup \{j\}) =$	31	25	27	21	14
$\rho_j(S^0) =$	31	25	27	21	14

$j^1 = 1;\ z(S^0 \cup \{1\}) = 31 > z(\varnothing);$
$S^1 = S^0 \cup \{1\} = \{1\} \neq J;\ t = 2$

j:	1	2	3	4	5
$z(S^1 \cup \{j\}) =$	-	35	33	38	29
$\rho_j(S^1) =$	-	4	2	7	-2

$j^2 = 4;\ z(S^1 \cup \{4\}) = 38 > 31;$
$S^2 = \{S^1 \cup \{4\}\} = \{1, 4\} \neq J;\ t = 3$

j:	1	2	3	4	5
$z(S^2 \cup \{j\}) =$	-	40	39	-	31
$\rho_j(S^2) =$	-	2	1	-	-7

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.7 Algoritmi euristici primali (segue)

$j^3 = 2$; $z(S^2 \cup \{2\}) = 40 > 38$;
$S^3 = \{ S^2 \cup \{2\}\} = \{1, 4, 2\} \neq J$; $t = 4$

j:	1	2	3	4	5
$z(S^3 \cup \{j\}) =$	-	-	37	-	33
$\rho_j(S^3) =$	-	-	-3	-	-7

Poiché $z(S^3 \cup \{j\}) \leq z(S^3)$ (cioè $\rho_j(S^3) \leq 0$), la *soluzione greedy* è $S^G = S^3 = \{1, 4, 2\}$, di profitto netto $z(S^G) = 40$.

- *Oss. 1*: come già sottolineato prima, l'algoritmo greedy costruisce una sequenza di sottoinsiemi di J di cardinalità crescente aggiungendo ad ogni passo l'elemento che dà luogo al massimo incremento della funzione obiettivo $z(\bullet)$.

- *Oss. 2*: l'algoritmo richiede al più n iterazioni. Per ogni iterazione sono richiesti $O(nm)$ calcoli. Pertanto il tempo di calcolo complessivo è $O(n^2m)$.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.7 Algoritmi euristici primali (segue)

- *Esempio 2*: data la matrice dei profitti e il vettore dei costi fissi

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 8 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 8 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 0 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad |J| = 6; |I| = 4$$

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Algoritmo greedy*

$S^0 = \varnothing;\ t = 1;\ z(\varnothing) = 0$

j:	1	2	3	4	5	6
$z(S^0 \cup \{j\}) =$	16	15	15	12	10	13
$\rho_j(S^0) =$	16	15	15	12	10	13

$j^1 = 1; z(S^0 \cup \{1\}) = 16 > z(\varnothing);$
$S^1 = S^0 \cup \{1\} = \{1\} \neq J; t = 2$

j:	1	2	3	4	5	6
$z(S^1 \cup \{j\}) =$	-	17	16	15	15	15
$\rho_j(S^1) =$	-	1	0	-1	-1	-1

$j^2 = 2; z(S^1 \cup \{2\}) = 17 > 16;$
$S^2 = \{S^1 \cup \{2\}\} = \{1, 2\} \neq J; t = 3$

j:	1	2	3	4	5	6
$z(S^2 \cup \{j\}) =$	-	-	17	16	15	15
$\rho_j(S^2) =$	-	-	0	-1	-2	-2

$\rho_j(S^2) \leq 0$, stop; *sol. greedy* $S^G = S^2 = \{1, 2\}$, con $z(S^G) = 17$.

Progettazione di Reti di Distribuzione

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.7 Algoritmi euristici primali (segue)

Algoritmo di ricerca locale: *algoritmo di scambio*

- Per cercare di migliorare la soluzione "greedy" si può applicare in cascata il seguente algoritmo di ricerca locale:

- Data la soluzione definita dall'insieme S si valutano gli insiemi da esso derivati nel seguente modo

  (i) $S \cup \{h\}, \quad \forall\, h \in J \setminus S$

  (ii) $S \setminus \{j\}, \quad \forall\, j \in S$

  (iii) $S \setminus \{j\} \cup \{h\}, \; \forall\, j \in S, \quad \forall\, h \in J \setminus S$

  e si sceglie quello che massimizza la funzione obiettivo $z(\bullet)$.

- Il procedimento viene ripetuto fin quando non si incrementa più $z(\bullet)$.

- *Oss.*: mentre nell'euristica "greedy" si tenta di attivare un impianto alla volta, nell'euristica di "scambio" si può *attivare* o *disattivare* un impianto o effettuare entrambe le operazioni.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP
5.7 Algoritmi euristici primali (segue)

- *Esempio 3*: data la seguente matrice dei profitti

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 8 & 1 & 10 \\ 8 & 10 & 1 \\ 8 & 1 & 10 \end{bmatrix} \qquad |J| = 3; |I| = 4$$

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Algoritmo greedy*

$S^0 = \varnothing;\ t = 1;\ z(\varnothing) = 0$

$$\begin{array}{r|ccc} j: & 1 & 2 & 3 \\ \hline z(S^0 \cup \{j\}) = & 30 & 20 & 20 \\ \rho_j(S^0) = & 30 & 20 & 20 \end{array}$$

$j^1 = 1; z(S^0 \cup \{1\}) = 30 > z(\varnothing);$
$S^1 = S^0 \cup \{1\} = \{1\} \neq J; t = 2$

$$\begin{array}{r|ccc} j: & 1 & 2 & 3 \\ \hline z(S^1 \cup \{j\}) = & - & 32 & 32 \\ \rho_j(S^1) = & - & 2 & 2 \end{array}$$

$j^2 = 2; z(S^1 \cup \{2\}) = 32 > 30;$
$S^2 = \{S^1 \cup \{2\}\} = \{1, 2\} \neq J; t = 3$

$$\begin{array}{r|ccc} j: & 1 & 2 & 3 \\ \hline z(S^2 \cup \{j\}) = & - & - & 34 \\ \rho_j(S^2) = & - & - & 2 \end{array}$$

$j^3 = 3; z(S^2 \cup \{3\}) = 34 > 32;$
$S^3 = \{S^2 \cup \{3\}\} = \{1, 2, 3\} = J$; stop.

sol. greedy $S^G = S^3 = \{1, 2, 3\} = J$, con $z(S^G) = 34$.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP
5.7 Algoritmi euristici primali (segue)

- *Algoritmo di scambio*

  Sia $S = S^G = S^3 = \{1, 2, 3\}$.

  Se si applica l'algoritmo di scambio a $S = \{1, 2, 3\}$ si verifica soltanto il caso (ii) ed in particolare l'unico insieme da esaminare è:

$$S \setminus \{j\} = S \setminus \{1\} = \{2, 3\}$$

  per il quale si ha

$$z(\{2, 3\}) = 40 - 4 = 36 > 34$$

  Pertanto la *disattivazione* dell'impianto 1 migliora la soluzione "greedy" (ed in questo caso porta alla individuazione della soluzione ottima).

- *Oss. 1*: queste due euristiche producono *soluzioni intere ammissibli* fornendo quindi un "*lower bound*" del problema primale.

- *Oss. 2*: per verificare la "qualità" delle soluzioni ottenute dalle euristiche primali è opportuno determinare un *upper bound*. A questo scopo si ricorre alle cosiddette "*euristiche duali*" il cui scopo è quello di produrre *soluzioni in generale non ammissibili* con un valore della funzione obiettivo superiore al valore ottimo cercato (upper bound).

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.8 Dualità nel problema di UFL

- Ci riferiamo a *problemi di massimo* (come la classica formulazione di UFLP).

- La dualità ha un ruolo importante nella determinazione di *upper bounds* (UB).

- Gli UB sono *necessari* per
  a) Valutare la bontà delle soluzioni euristiche
  b) Loro uso negli schemi di *B&B*

- Le considerazioni che faremo le utilizzeremo sia per rispondere al punto a) che per il punto b)

- In particolare, descriveremo procedure per il calcolo di un'*euristica* (*duale*) per il problema duale della formulazione rilassata linearmente del UFLP.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.8 Dualità nel problema di UFL (segue)

- il nome di *euristica duale* deriva dall'osservazione che, in base ai risultati della *teoria della dualità*, ogni *soluzione ammissibile* del *problema duale* del rilassamento lineare del problema di "plant location" ha un *valore superiore* a quello della *soluzione ottima intera* ossia fornisce un *upper bound*.

Infatti:

- Dato un problema di massimo formulato in termini di PLI e considerato il suo rilassamento lineare RL(PLI) si ha:

$$z^*(\mathrm{PLI}) \le z^*(\mathrm{RL(PLI)})$$

- Se DRL(PLI) è il *problema duale* di RL(PLI) per il teorema della dualità nella PL si ha:

$$z^*(\mathrm{PLI}) \le z^*(\mathrm{RL(PLI)}) = g^*(\mathrm{DRL(PLI)}) \le g(\mathrm{DRL(PLI)})$$

- Pertanto ogni soluzione ammissibile di DRL(PLI) fornisce un *upper bound* per PLI.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.8 Dualità nel problema di UFL (segue)

- Determinazione del *problema duale* DRL(UFL) con riferimento alla formulazione (UFL) per il problema di *plant location*.

- Il problema RL(UFL) è il seguente:

RL(UFL)

$$\max \quad z = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \pi_{ij} y_{ij} - \sum_{j \in J} f_j x_j \qquad \text{(a)}$$

(var. duali) s.t.

$$(u_i) \qquad \sum_{j \in J} y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \qquad \text{(b)}$$

$$(w_{ij}) \qquad y_{ij} \le x_j, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \qquad \text{(c)}$$

$$(t_j) \qquad x_j \le 1, \quad \forall j \in J \qquad \text{(g)}$$

$$y_{ij} \ge 0, \forall i \in I, \forall j \in J; \quad x_j \ge 0, \forall j \in J \qquad \text{(d'')}$$

- Nella formulazione di RL(UFL) in corrispondenza dei vincoli sono indicate le *variabili* del *problema duale* DRL(UFL).

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.8 Dualità nel problema di UFL (segue)

- Si ricorda che in generale vale la seguente corrispondenza tra problemi primale e duale

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\max z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{cases} \quad ; \quad (\mathrm{D})\begin{cases}\min g = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\end{cases}$$

- Formulazione di DRL(UFL)

DRL(UFL)

$$\min \quad g = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{j \in J} t_j \qquad \text{(h)}$$

s.t.

$$u_i + w_{ij} \geq \pi_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \qquad \text{(k)}$$

$$-\sum_{i \in I} w_{ij} + t_j \geq -f_j, \quad \forall j \in J \qquad \text{(l)}$$

$$w_{ij} \geq 0, \forall i \in I, \forall j \in J; \quad t_j \geq 0, \forall j \in J \qquad \text{(o)}$$

con u_i variabile libera, per ogni $i \in I$.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.8 Dualità nel problema di UFL (segue)

- *1ª formulazione compatta* di DRL(UFL)
  - È possibile eliminare dalla precedente formulazione variabili e vincoli osservando che:

    i)

$$w_{ij} \geq \pi_{ij} - u_i, \qquad \forall i \in I, \forall j \in J$$

$$t_j \geq \sum_{i \in I} w_{ij} - f_j, \quad \forall j \in J$$

    ii) *fissato* u_i, $\forall\, i \in I$, la *funzione obiettivo duale* è *minimizzata* ponendo:

$$w_{ij} = \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\}, \qquad \forall i \in I, \forall j \in J$$

$$t_j = \max\left\{0; \left(\sum_{i \in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} - f_j\right)\right\}, \quad \forall j \in J$$

  - È possibile quindi definire una formulazione equivalente per DRL(UFL), detta *compatta* come:

$$g^* = \min_{\mathbf{u}} \left(\sum_{i \in I} u_i + \sum_{j \in J} \max\left\{0; \left(\sum_{i \in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} - f_j\right)\right\}\right)$$

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.8 Dualità nel problema di UFL (segue)

- *2ª formulazione compatta* di DRL(UFL)
  - Se $$t_j = \max\left\{0; \left(\sum_{i\in I}\max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} - f_j\right)\right\} > 0$$
    allora $\exists\, k \in I$ tale che $\pi_{kj} - u_k > 0$
  - Se u_k viene *incrementato* di una piccola quantità e t_j viene *decrementato* della stessa quantità il valore della funzione obiettivo non varia (o comunque non aumenta).
  - Quindi, esiste una soluzione ottima di DRL(UFL) per la quale $$\sum_{i\in I}\max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} - f_j \le 0, \quad \forall\, j \in J$$
  - Inoltre, se $u_i > \max_{j\in J}\,[\pi_{ij}]$ allora u_i può essere decrementata di una piccola quantità senza incrementare il valore della funzione obiettivo.
  - Queste osservazioni permettono di formulare DRL(UFL) in un'altra forma compatta:

$$\min \quad g = \sum_{i\in I} u_i$$

s.t.

$$\sum_{i\in I}\max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} - f_j \le 0, \quad \forall\, j \in J \qquad \text{(p)}$$

$$u_i \le \max_{j\in J}[\pi_{ij}], \quad \forall\, i \in I \qquad \text{(q)}$$

con u_i variabile libera, per ogni $i \in I$.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.8 Dualità nel problema di UFL (segue)

- Le due *formulazioni compatte* di DRL(UFL), pur non essendo lineari per la presenza dell'operatore $\max\,[\cdot]$, *contengono* solo $m = |I|$ *variabili*

- Inoltre, siccome le variabili u_i sono libere, si ha che

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{j\in J} \max\left\{0; \left(\sum_{i\in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} - f_j\right)\right\} \qquad \text{(h')}$$

è un valido *upper bound* per z^*(UFLP), che si riduce a

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i \qquad \text{(h'')}$$

se

$$\sum_{i\in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} - f_j \le 0, \quad \forall\, j \in J \qquad \text{(p)}$$

è soddisfatto.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.9 Dualità per valutare l'euristica greedy

- È possibile utilizzare la (h') per calcolare un UB e quindi *valutare* la bontà della *soluzione* (ammissibile) di UFLP ottenuta con l'algoritmo *greedy*.

- A partire da qualsiasi soluzione $S \subseteq J$ di UFLP, sia

$$\bar{u}_i(S) = \max_{j \in S}[\pi_{ij}], \quad \forall i \in I$$

- Pertanto, il valore della soluzione S è

$$z(S) = \sum_{i \in I} \bar{u}_i(S) - \sum_{j \in S} f_j$$

- Inoltre, si noti che:

$$\rho_j(S) = z(S \cup \{j\}) - z(S) = \\ = \sum_{i \in I} \max\{0; (\pi_{ij} - \bar{u}_i(S))\} - f_j, \quad \forall j \in J \setminus S$$

- Quindi da

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{j \in J} \max\left\{0; \left(\sum_{i \in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} - f_j\right)\right\} \quad \text{(h')}$$

si ha il seguente UB calcolabile a partire da S

$$g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i \in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j \in J \setminus S} \max\{0; \rho_j(S)\}$$

poiché $\pi_{ij} - \bar{u}_i(S) \le 0, \ \forall i \in I, \ \forall j \in S$.

Progettazione di Reti di Distribuzione

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.9 Dualità per valutare l'euristica greedy (segue)

- Sia a questo punto S^G la *soluzione* ottenuta con l'algoritmo *greedy*

- Si noti che $\rho_j(S^G) \leq 0, \forall j \in J \setminus S^G$

- Pertanto, $g(\bar{\mathbf{u}}(S^G)) = \sum_{i \in I} \bar{u}_i(S^G) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S^G} [\pi_{ij}]$

- Il *rapporto* tra il valore $z(S^G)$ della *soluzione greedy* S^G e il valore z^* della *soluzione ottima* è:

$$\frac{z(S^G)}{z^*} \geq \frac{z(S^G)}{g(\bar{\mathbf{u}}(S^G))} = \frac{\sum_{i \in I} \bar{u}_i(S^G) - \sum_{j \in S} f_j}{\sum_{i \in I} \bar{u}_i(S^G)}$$

- Conclusione, l'algoritmo *greedy* produce una *soluzione tanto migliore* quanto *più piccoli* sono i *costi fissi rispetto* ai *profitti*.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.9 Dualità per valutare l'euristica greedy

- Riconsideriamo l' *Esempio 2*

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 8 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 8 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 0 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad |J| = 6; |I| = 4$$

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Algoritmo greedy*

$$\rho_j(\emptyset) = [16, 15, 15, 12, 10, 13] \Rightarrow j^1=1, \quad S^1=\{1\}, \quad z(S^1)=16, \; g(\bar{\mathbf{u}}(S^1))=20$$

$$\rho_j(\{1\}) = [\; -, \; 1, \; 0, \; -1, \; -1, \; -1] \Rightarrow j^2=2, \quad S^2=\{1,2\}, \; z(S^2)=17, \; g(\bar{\mathbf{u}}(S^2))=22$$

$$\rho_j(\{1,2\}) = [\; -, \; -, \; 0, \; -1, \; -2, \; -2] \Rightarrow \text{STOP}, \; S^G=\{1,2\}, \; z(S^G)=17, \; g(\bar{\mathbf{u}}(S^G))=22$$

$$\text{UB} = g(\bar{\mathbf{u}}(S^t)) = \textstyle\sum_{i\in I} \max_{j\in S^t} [\pi_{ij}] + \sum_{j\in J\setminus S^t} \max\,\{0; \rho_j(S^t)\}$$

$$\frac{z(S^G)}{z^*} \geq \frac{z(S^G)}{g(\bar{\mathbf{u}}(S^G))} = \frac{17}{22} \cong 0{,}77$$

In realtà conviene prendere l'UB più piccolo e quindi

$$\frac{z(S^G)}{z^*} \geq \frac{z(S^G)}{\text{UB}_{\min}} = \frac{17}{20} = 0{,}85$$

Progettazione di Reti di Distribuzione

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.10 Algoritmo euristico di discesa duale

- Vediamo ora come *calcolare* un *buon* UB di $z^*(\text{UFL})$.

- Chiaramente dovremmo, ad esempio, risolvere all'ottimo RL(UFL), oppure DRL(UFL) utilizzando ad esempio ad una delle sue formulazioni compatte.

- Ci potremmo però accontentare di ottenere una buona soluzione euristica di DRL(UFL). Infatti, sappiamo che vale la seguente relazione:

$$z^*(\text{UFL}) \leq z^*(\text{LR(UFL)}) = g^*(\text{DRL(UFL)}) \leq g(\text{DRL(UFL)})$$

  e quindi $g(\text{DRL(UFL)})$ è un valido UB di $z^*(\text{UFL})$.

- Questa può essere ottenuta per mezzo di un *algoritmo di discesa duale*, cioè un algoritmo che a partire da una soluzione ammissibile $\mathbf{u}$ per DRL(UFL) cerchi di migliorarla movendosi lungo direzioni di discesa ammissibili.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.10 Algoritmo euristico di discesa duale (segue)

- Poiché il valore ottimo del duale compatto coincide con il valore ottimo di DRL(UFL), il problema che si pone per trovare un upper bound di z^*(UFLP) è il seguente:

  come scegliere nel duale compatto le variabili u_i, $\forall\, i \in I$, in modo da ottenere un valore "soddisfacente" (cioè il più possibile vicino all'ottimo) della f. o. duale.

- Una *prima possibile scelta* è porre:

$$u_i = \bar{u}_i = \max_{j \in J}[\pi_{ij}], \quad \forall\, i \in I$$

- Questo implica che:

$$\pi_{ij} - \bar{u}_i \le 0, \qquad \forall\, i \in I, \ \forall\, j \in J$$
$$\textstyle\sum_{i \in I} \max\{0; (\pi_{ij} - \bar{u}_i)\} \ - f_j \le 0, \qquad \forall\, j \in J$$

- in questo caso la funzione obiettivo duale vale:

$$\text{UB} = g(\bar{\mathbf{u}}) = \textstyle\sum_{i \in I} \bar{u}_i$$

- Questa scelta dà luogo negli esempi illustrati prima rispettivamente ai seguenti vettori delle soluz. duali:

$$\bar{\mathbf{u}}^1 = [13, 9, 6, 10, 10, 4]; \ \ \bar{\mathbf{u}}^2 = [8, 8, 6, 4], \ \ \bar{\mathbf{u}}^3 = [10, 10, 10, 10];$$

  ai quali corrispondono i seguenti *upper bound*:

$$\text{UB}^1 = g(\bar{\mathbf{u}}^1) = 52; \quad \text{UB}^2 = g(\bar{\mathbf{u}}^2) = 26; \quad \text{UB}^3 = g(\bar{\mathbf{u}}^3) = 40$$

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.10 Algoritmo euristico di discesa duale (segue)

- È possibile migliorare il valore dei bound ottenuti dalla scelta iniziale?

- Per rispondere a questa domanda osserviamo che finché valgono le disequazioni

$$\sum_{i\in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} \leq f_j, \qquad \forall\, j \in J \qquad (\otimes)$$

la funzione obiettivo vale

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i$$

- Questa osservazione induce immediatamente la seguente *procedura dual descent*:

  Ridurre il valore delle variabili duali u_i fino al valore minimo per cui continuano a valere le disequazioni $(\otimes)$.

- Questa procedura (introdotta da Erlenkotter nel 1978) è molto efficace anche se non sempre trova un bound vicino all'ottimo di DRL(UFL).

- Il problema da esaminare ora è stabilire quale criterio seguire per raggiungere l'obiettivo definito dalla procedura.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.10 Algoritmo euristico di discesa duale (segue)

- Il procedimento di discesa opera fondamentalmente nel seguente modo:

  - Si parte dai valori delle variabili duali $u_i = \bar{u}_i = \max_{j \in J} [\pi_{ij}]$ e, considerando ciclicamente gli indici $i \in I$, si cerca di ridurre i valori delle u_i in modo da rispettare le condizioni $(\otimes)$.

  - Se u_i non può essere ridotta, si considera u_{i+1}.

  - Se u_i può essere ridotta, allora:
    - si riduce il suo valore a $\max_{j \in J} \{\pi_{ij} : \pi_{ij} < u_i\}$ (seconda miglior scelta) se questa riduzione assicura il soddisfacimento delle condizioni $(\otimes)$.
    - altrimenti, si riduce u_i al valore minimo consentito dalle condizioni $(\otimes)$.

  - Quando nessuna u_i può essere ulteriormente ridotta la procedura termina.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.10 Algoritmo euristico di discesa duale (segue)

- Riconsideriamo l' *Esempio 3*

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 8 & 1 & 10 \\ 8 & 10 & 1 \\ 8 & 1 & 10 \end{bmatrix} \qquad |J| = 3; |I| = 4$$

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Applicando la procedura di discesa duale si ha (ricordando che $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{j\in J} \max\left\{0; \left(\sum_{i\in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} - f_j\right)\right\}$):

Passo	$\mathbf{u}^T$				$f_j - \sum_{i\in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\}$			$g(\mathbf{u})$
0	10	10	10	10	2	2	2	40
1	8	10	10	10	2	0	2	38
2	8	8	10	10	2	0	0	36
3	8	8	$10-\varepsilon$	10	2	$-\varepsilon$	0	36
4	8	8	10	$10-\varepsilon$	2	0	$-\varepsilon$	36
5	$8-\varepsilon$	8	10	10	$2-\varepsilon$	$-\varepsilon$	0	36
6	8	$8-\varepsilon$	10	10	$2-\varepsilon$	0	$-\varepsilon$	36

- *Dopo i primi due passi* u_1 e u_2 sono state ridotte al valore del 2° massimo di riga. *Dal passo 3* in poi, ogni ipotesi di ulteriore riduzione ε (piccola a piacere) di u_i comporta la violazione del vincolo $\sum_{i\in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\} \leq f_j$, per $j = 2$ o $j = 3$. Pertanto dopo aver ciclato per tutti gli $i \in I$ non si ottiene nessuna possibile riduzione per le u_i e la procedura termina con $\mathrm{UB} = 36$.
- Poiché la soluzione ammissibile $S = \{2, 3\}$, (vedi pag. 40), ha valore $z(S) = 36$, è anche *ottima*.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.11 Esercizio

- Sia data la seguente matrice dei profitti

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 10 & 15 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 10 & 6 \\ 10 & 10 & 8 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1, 2, \ldots, 6\} \\ j \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array}$$

e il seguente vettore dei costi fissi

$$f_j = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

1. Formulare un problema di localizzazione degli impianti;
2. Trovare una soluzione greedy e migliorarla con l'algoritmo di scambio (una sola iterazione);
3. Valutare la bontà della soluzione trovata.

1) Formulazione:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{6} \pi_{ij} y_{ij} - \sum_{j=1}^{4} f_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{4} y_{ij} = 1, \qquad i \in \{1,\ldots,6\}$$

$$y_{ij} \le x_j, \qquad i \in \{1,\ldots,6\},\ j \in \{1,\ldots,4\}$$

$$y_{ij}, x_j \in \{0, 1\}, \qquad i \in \{1,\ldots,6\},\ j \in \{1,\ldots,4\}$$

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.11 Esercizio (segue)

2) Soluzione greedy migliorata con algoritmo di scambio

i) Soluzione greedy

Iniz.

$S^0 = \emptyset;\ \ t = 1;\ \ z(\emptyset) = 0$

Iter. 1

j:	1	2	3	4
$z(S^0 \cup \{j\}) =$	36	36	38	37
$\rho_j(S^0) =$	36	36	38	37

$j^1 = 3;\ z(S^0 \cup \{3\}) = 38 > z(\emptyset);$

$S^1 = S^0 \cup \{3\} = \{3\} \neq J;\ t = 2$

Iter. 2

j:	1	2	3	4
$z(S^1 \cup \{j\}) =$	37	38	-	39
$\rho_j(S^1) =$	-1	0	-	1

$j^2 = 4;\ z(S^1 \cup \{4\}) = 39 > 38;$

$S^2 = \{S^1 \cup \{4\}\} = \{3, 4\} \neq J;\ t = 3$

Iter. 3

j:	1	2	3	4
$z(S^2 \cup \{j\}) =$	37	37	-	-
$\rho_j(S^2) =$	-2	-2	-	-

$\rho_j(S^2) \leq 0$, stop; *sol. greedy* $S^G = S^2 = \{3, 4\}$, con $z(S^G) = 39$.

Progettazione di Reti di Distribuzione

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.11 Esercizio (segue)

ii) Algoritmo di scambio

- $S^G \setminus \{j\}$, $\forall j \in J$, già considerato.
- $S^G \cup \{j\}$, $\forall j \in J$, già considerato.
- $S^G \setminus \{j\} \cup \{h\}$, $\forall j,h \in J$:
  Gli unici casi da esaminare sono:

  a) $S^G \setminus \{3\} \cup \{1\} = \{1, 4\}$
  b) $S^G \setminus \{3\} \cup \{2\} = \{2, 4\}$

  a cui corrispondono i seguenti valori di $z(\bullet)$

  a) $z(\{1, 4\}) = (6 + 15 + 10 + 8 + 10 + 7) - 15 = 41$
  b) $z(\{2, 4\}) = (8 + 15 + 8 + 6 + 10 + 7) - 13 = 41$.

- Pertanto sia $\{1, 4\}$ che $\{2, 4\}$ sono soluzioni migliori di $\{3, 4\}$.

N.B.: Eseguendo eventualmente la seconda iterazione si può verificare che non si riesce a migliorare il valore 41 della soluzione corrente (sia se consideriamo $\{1, 4\}$ o $\{2, 4\}$ come nuove soluzioni correnti), quindi l'algoritmo di scambio termina alla seconda iterazione, con la soluzione corrente che pertanto è un ottimo locale!

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.11 Esercizio (segue)

3) Euristica di discesa duale per valutare la bontà delle soluzioni:

Passo	$\mathbf{u}^T$						$f_j - \sum_{i\in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\}$				$g(\mathbf{u})$
0	10	15	10	10	10	7	8	6	10	7	62
1	8	15	10	10	10	7	8	6	8	7	60
2	8	10	10	10	10	7	8	6	8	2	55
3	8	10	8	10	10	7	6	6	8	2	53
4	8	10	8	8	10	7	6	6	6	2	51
5	8	10	8	8	8	7	4	4	6	2	49
6	8	10	8	8	8	6	4	4	6	1	48
7	6	10	8	8	8	6	4	2	4	1	46
8	6	9	8	8	8	6	4	2	3	0	45
9	6	9	6	8	8	6	2	0	3	0	43
10	6	9	6	6	8	6	0	0	1	0	41
11	6	9	6	6	$8-\varepsilon$	6	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$1-\varepsilon$	0	$41+\varepsilon$
12	6	9	6	6	8	$6-\varepsilon$	0	$-\varepsilon$	1	$-\varepsilon$	$41+\varepsilon$
13	$6-\varepsilon$	9	6	6	8	6	0	$-\varepsilon$	$1-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$41+\varepsilon$
14	6	$9-\varepsilon$	6	6	8	6	0	0	$1-\varepsilon$	$-\varepsilon$	41
15	6	9	$6-\varepsilon$	6	8	6	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$1-\varepsilon$	0	$41+\varepsilon$
16	6	9	6	$6-\varepsilon$	8	6	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$1-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$41+2\varepsilon$

Per i primi sei passi ogni u_i è stata ridotta al valore del secondo massimo di riga. *Dal passo 7* ricomincia il ciclo con u_1 ridotta al valore del terzo massimo di riga. *Al passo 8* u_2 non può essere ridotta con lo stesso criterio perché porterebbe a violare qualcuno dei vincoli $(\otimes)$. *Ai passi 9 e 10* u_3 e u_4 sono ridotte al valore del terzo massimo delle corrispondenti righe. *Dal passo 11 al passo 16* viene completato il ciclo dei possibili casi ma ogni volta viene violato qualche vincolo. Questo significa che il migliore bound si ottiene al passo 10 nel quale UB = 41. La ricerca avrebbe potuto essere interrotta al *passo 10* in quanto il valore 41 è uguale al lower bound $z(\{1, 4\})$ soluzione trovata con l'algoritmo di scambio il che implica l'ottimalità della soluzione stessa.

5. *Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP*

5.12 Euristica primale *dual-based*

- Si basa sull'applicazione delle proprietà di *ortogonalità* sugli *scarti complementari* alle formulazioni del problema primale rilassato linearmente RL(UFLP) e del suo duale DRL(UFLP) del problema UFLP.

- Nella PL ad ogni soluzione del problema duale (primale) è associata una soluzione del problema primale (duale) imponendo le relazioni di ortogonalità sugli scarti complementari.

- Imponendo le relazioni di ortogonalità sugli scarti complementari i valori delle f.o. dei problemi primale e duale calcolate per queste soluzioni coincidono.

- *Se quindi tali soluzioni del primale e del duale sono ammissibili allora sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi.*

- L'euristica primale *dual-based*, a partire *da* una buona *soluzione ammissibile* (auspicabilmente ottima) di DRL(UFLP) (soluzione duale), *costruisce* una *soluzione ammissibile* per il problema UFLP (soluzione primale) di qualità molto buona che spesso è anche ottima, *utilizzando le proprietà di ortogonalità sugli scarti complementari*.

- In particolare, se tutte le relazioni sugli scarti complementari sono soddisfatte allora i valori delle f.o. delle due soluzioni coincidono e quindi la soluzione primale ottenuta è ottima per UFLP.

Progettazione di Reti di Distribuzione

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.12 Euristica primale *dual-based* (segue)

- Dalle formulazioni di RL(UFL) e DRL(UFL) si ricavano le seguenti relazioni di ortog. sugli scarti complementari:

$$(u_i + w_{ij} - \pi_{ij})\, y_{ij} = 0, \qquad \forall\, i \in I \text{ e } \forall\, j \in J \qquad (1)$$
$$(f_j - \textstyle\sum_{i\in I} w_{ij} + t_j)\, x_j = 0, \qquad \forall\, j \in J \qquad (2)$$
$$(1 - \textstyle\sum_{j\in J} y_{ij})\, u_i = 0, \qquad \forall\, i \in I \qquad (3)$$
$$(x_j - y_{ij})\, w_{ij} = 0, \qquad \forall\, i \in I \text{ e } \forall\, j \in J \qquad (4)$$
$$(1 - x_j)\, t_j = 0, \qquad \forall\, j \in J \qquad (5)$$

- Supponiamo di aver determinato una soluzione $\mathbf{u}$ di DRL(UFL) attraverso l'algoritmo di discesa duale che opera sul problema duale compatto e che pertanto (avendo posto $w_{ij} = (\pi_{ij} - u_i)^+$) soddisfa i seguenti vincoli:

$$u_i \le \max_{j\in J} \{\pi_{ij}\}, \qquad \forall\, i \in I \qquad (a)$$
$$\textstyle\sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j \le 0, \qquad \forall\, j \in J \qquad (b)$$
$$t_j = 0, \qquad \forall\, j \in J \qquad (c)$$

- La (5) è soddisfatta e la (1), la (2) e la (4) possono riscriversi come:

$$((\pi_{ij} - u_i)^+ - (\pi_{ij} - u_i))\, y_{ij} = 0, \qquad \forall\, i \in I \text{ e } \forall\, j \in J \qquad (1')$$
$$(f_j - \textstyle\sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+)\, x_j = 0, \qquad \forall\, j \in J \qquad (2')$$
$$(x_j - y_{ij})\, (\pi_{ij} - u_i)^+ = 0, \qquad \forall\, i \in I \text{ e } \forall\, j \in J \qquad (4')$$

- Ricercando una soluzione ammissibile per il primale la (3) sarà senz'altro soddisfatta.

Progettazione di Reti di Distribuzione

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.12 Euristica primale *dual-based* (segue)

- Quindi le relazioni da imporre sono le seguenti:

$$((\pi_{ij} - u_i)^+ - (\pi_{ij} - u_i))\, y_{ij} = 0, \quad \forall\, i \in I \text{ e } \forall\, j \in J \qquad (1')$$
$$(f_j - \textstyle\sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+)\, x_j = 0, \quad \forall\, j \in J \qquad (2')$$
$$(x_j - y_{ij})\, (\pi_{ij} - u_i)^+ = 0, \quad \forall\, i \in I \text{ e } \forall\, j \in J \qquad (4')$$

- La (2') suggerisce di ricercare una soluzione ammissibile per il primale con:
  $x_j = 0$, per ogni $j \in J$ per cui $\sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j < 0$.

- Sia pertanto $J(\mathbf{u}) = \{\, j \in J : \sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = 0\}$ e si fissi $x_j = 0$ per ogni $j \notin J(\mathbf{u})$. In tal modo la (2') è soddisfatta.

- Quindi i siti candidati ad esser attivati sono quelli del sottoinsieme $J(\mathbf{u})$; pertanto x_j può assumere valore 1 solo se $j \in J(\mathbf{u})$.

- Dovendo costruire una soluzione primale ammissibile, i valori delle variabili y_{ij}, per ogni $i \in I$, devono essere:
  (i) $y_{ij_i} = 1$ esattamente per un solo j_i; tutte le altre $y_{ij} = 0$.
  (ii) ovviamente deve essere $x_{j_i} = 1$, con $j_i \in J(\mathbf{u})$.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.12 Euristica primale *dual-based* (segue)

- La $(1')$ è senz'altro verificata se $y_{ij} = 0$. Pertanto per poter soddisfare la $(1')$ anche se $y_{ij_i} = 1$ occorre che:

  per $j_i \in J(\mathbf{u})$ e $x_{j_i} = 1$, risulti $\pi_{ij_i} \geq u_i, \forall\ i \in I$.

- Quindi, sia $S(\mathbf{u}) \subseteq J(\mathbf{u})$ il sottoinsieme di siti attivati (cioè $x_j = 1$, $\forall\ j \in S(\mathbf{u})$), tale che:

  per ogni $i \in I$, esiste un $j \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$.

- La *soluzione primale* definita da $S(\mathbf{u})$ sarà quindi:
  (i) $x_j = 1$ per $j \in S(\mathbf{u})$; $x_j = 0$ altrimenti.
  (ii) per ogni $i \in I$, $y_{ij_i} = 1$ per (un solo) $j_i = \text{argmax}_{j \in S(\mathbf{u})}\ [\pi_{ij}]$, e $y_{ij} = 0$ per gli altri $j \in J$.

- Tale soluzione soddisfa per costruzione le relazioni $(1')$ e $(2')$.

- Rimane da verificare il soddisfacimento della $(4')$, che:
  - *è soddisfatta* per ogni coppia (i, j), se $x_j = 0$ (e quindi $y_{ij} = 0$).
  - *non è soddisfatta*, se $x_j = 1$ (con $j \in S(\mathbf{u})$) ed esiste un $i \in I$ tale che $y_{ij} = 0$ e $(\pi_{ij} - u_i)^+ > 0$, cioè se $\pi_{ij} > u_i$.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.12 Euristica primale *dual-based* (segue)

- Definiamo $k_i(S(\mathbf{u})) = |\{ j \in S(u) : \pi_{ij} > u_i\}|$, per ogni $i \in I$.

Teorema

Date una soluzione ammissibile $\mathbf{u}$ del problema duale compatto che soddisfa quindi (a), (b) e (c) e una soluzione $S(\mathbf{u})$ del primale, se $k_i(S(\mathbf{u})) \leq 1$, per ogni $i \in I$, allora $S(\mathbf{u})$ è ottima per UFLP.

Dimostrazione.

Per un dato $i \in I$ la (4') è *soddisfatta* se:

$k_i(S(\mathbf{u})) = 0$; in questo caso $\pi_{ij} \leq u_i$ per ogni $j \in S(\mathbf{u})$.

$k_i(S(\mathbf{u})) = 1$; in questo caso esiste solo un $j_i \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij_i} > u_i$, ma $y_{ij_i} = 1$ dato che $j_i = \mathrm{argmax}_{j\in S(u)}\, [\pi_{ij}]$.

Per un dato $i \in I$ la (4') è *non soddisfatta* se:

$k_i(S(\mathbf{u})) > 1$; in questo caso c'è un indice $j' \in S(\mathbf{u})$, diverso da $j_i = \mathrm{argmax}_{j\in S(\mathbf{u})}\, [\pi_{ij}]$, per cui $\pi_{ij'} > u_i$ e $y_{ij'} = 0$.

Quindi solo nelle condizioni del teorema, la (4') è *soddisfatta*. In questo caso tutte le relazioni sugli scarti complementari sono soddisfatte e quindi $g(\mathbf{u}) = z(S(\mathbf{u}))$. Siccome sia $\mathbf{u}$ che $S(\mathbf{u})$ definiscono due soluzioni ammissibili rispettivamente per il problema duale rilassato e per il problema primale rilassato queste allora sono anche ottime. Inoltre siccome la soluzione primale è costruita a componenti intere è ammissibile per UFLP e quindi anche ottima. c.v.d.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.12 Euristica primale *dual-based* (segue)

Determinazione della soluzione primale $S(\mathbf{u})$.

- Il teorema suggerisce pertanto di scegliere $S(\mathbf{u})$ come *sottoinsieme minimale* di $J(\mathbf{u})$ in modo da soddisfare le:

$$((\pi_{ij} - u_i)^+ - (\pi_{ij} - u_i))\, y_{ij} = 0, \quad \forall\, i \in I \text{ e } \forall\, j \in J \qquad (1')$$
$$(f_j - \textstyle\sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+)\, x_j = 0, \quad \forall\, j \in J \qquad (2')$$

1. Si individua l'insieme $J(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = 0\}$;
2. Si individua il sottoinsieme minimale $S(\mathbf{u}) \subseteq J(\mathbf{u})$ tale che, per ogni $i \in I$, esiste un $j \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$;

Osservazioni finali.

- $S(\mathbf{u})$ definisce una soluzione ammissibile per UFLP costruita a partire da una soluzione ammissibile $\mathbf{u}$ per DRL(UFL) compatto.
- Per costruzione le condizioni (3) e (5) degli scarti complementari sono soddisfatte.
- Siccome $x_j = 0$ per $j \notin S(\mathbf{u}) \subseteq J(\mathbf{u})$, si ha che $x_j = 0$ per $j \notin J(\mathbf{u})$ e quindi anche la (2') è soddisfatta.
- Se siamo nelle condizioni del Teorema, la (4') risulta verificata e pertanto abbiamo la prova dell'ottimalità della soluzione $S(\mathbf{u})$ per UFLP.
- L'algoritmo di *discesa duale* decrementa ad ogni iterazione la u_i non fino al minimo valore ma al più al successivo valore più piccolo di π_{ij}, per far in modo che $k_i(S(\mathbf{u}))$ sia il più piccolo possibile.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.12 Euristica primale *dual-based* (segue)

Esempi.

- Riconsideriamo l' *Esempio 3* con $|J| = 3$ e $|I| = 4$.

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 8 & 1 & 10 \\ 8 & 10 & 1 \\ 8 & 1 & 10 \end{bmatrix} \quad [u_i] = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad [k_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[f_j - \textstyle\sum_i (\pi_{ij} - u_i)^+] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Al termine della discesa duale abbiamo la soluzione $\mathbf{u}$ sopra riportata di valore $g(\mathbf{u}) = 36$.

- $J(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \sum_{i \in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = 0\} = \{2, 3\}$.
- $S(\mathbf{u}) \subseteq J(\mathbf{u})$, insieme minimale tale che per ogni $i \in I$, esiste un $j \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$; $S(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u})$.
- I valori $k_i(S(\mathbf{u})) = |j \in S(\mathbf{u}) : \pi_{ij} > u_i|$ sono sopra riportati.

- Siccome $k_i(S(\mathbf{u})) \leq 1$, la soluzione primale $S(\mathbf{u}) = \{2, 3\}$ è ottima. Si noti inoltre che $z(S(\mathbf{u})) = 36$.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.12 Euristica primale *dual-based* (segue)

Esempi.

- Riconsideriamo l'*Esercizio 5.11* con $|J| = 4$ e $|I| = 6$.

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 10 & 15 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 10 & 6 \\ 10 & 10 & 8 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad [u_i] = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \quad [k_i^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [k_i^2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[f_j - \textstyle\sum_i (\pi_{ij} - u_i)^+] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Al termine della discesa duale abbiamo la soluzione $\mathbf{u}$ sopra riportata di valore $g(\mathbf{u}) = 41$.

- $J(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \sum_{i \in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = 0\} = \{1, 2, 4\}$.
- $S(\mathbf{u}) \subseteq J(u)$, insieme minimale tale che per ogni $i \in I$, esiste un $j \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$; $S(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u})$.
  Due possibili soluzioni:
  - $S^1(\mathbf{u}) = \{1, 4\}$ con i valori $k_i(S^1(\mathbf{u}))$ sopra riportati;
  - $S^2(\mathbf{u}) = \{2, 4\}$ con i valori $k_i(S^2(\mathbf{u}))$ sopra riportati.

- Per entrambe le soluzioni $k_i \leq 1$, quindi le due soluzioni primali $S^1(\mathbf{u}) = \{1, 4\}$ e $S^2(\mathbf{u}) = \{2, 4\}$ sono ottime. Si noti inoltre che $z(S^1(\mathbf{u})) = z(S^2(\mathbf{u})) = 41$.

Progettazione di Reti di Distribuzione

5. *Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP*

5.13 Considerazioni finali sull'algoritmo discesa duale

- L'algoritmo di discesa duale per il calcolo della soluzione duale $\mathbf{u}$ è *euristico* e non sempre permette di determinare la soluzione ottima del problema rilassato duale.

- Una *versione più efficace* dell'*algoritmo di discesa duale*, che con maggior probabilità permette di ottenere una coppia primale duale per la quale sono soddisfatte le condizioni del Teorema precedente, si può conseguire modificando opportunamente l'ordine con cui si cerca di decrementare le variabili u_i, invece di ciclare semplicemente sulle u_i stesse.

- Definiamo $Q_i(\mathbf{u}) = \{j \in J : \pi_{ij} - u_i \geq 0\}$.

- Si noti che $|Q_i(\mathbf{u})|$ cresce al decrescere di u_i e che, dopo aver decrementato la variabile u_i ad un valore che non potrà esser più ulteriormente decrementato, si ha che $k_i \leq |Q_i(\mathbf{u})|$.

- Risulta quindi conveniente decrementare prima la variabile u_s per cui $|Q_s(\mathbf{u})| \leq |Q_i(\mathbf{u})|$ per ogni $i \in I$, in modo da ottenere valori bassi per i k_i.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.13 Considerazioni finali sull'algoritmo discesa duale

- Esempio di *non ottimalità* della soluzione duale.

Sia data la seguente istanza di UFLP

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1, 2, 3\} \\ j \in \{1, 2, 3\} \end{array}$$

$$f_j = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Euristica di discesa duale:

Passo	$\mathbf{u}^T$			$f_j - \sum_{i \in I} \max\{0; (\pi_{ij} - u_i)\}$			$g(\mathbf{u})$
0	2	2	2	2	2	2	6
1	0	2	2	2	0	0	4

- Al termine della discesa duale (anche nella versione migliorata) abbiamo la soluzione $\mathbf{u}$ di valore $g(\mathbf{u}) = 4$.

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad [u_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad [k_i] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[f_j - \textstyle\sum_i (\pi_{ij} - u_i)^+] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Applicando l'euristica primale dual-based a partire da $\mathbf{u}$:

- $J(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \sum_{i \in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = 0\} = \{2, 3\}$.
- $S(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) = \{2, 3\}$ e il vettore $[k_i(S(\mathbf{u}))] = (2, 0, 0)$.
- $z(S(\mathbf{u})) = 2$.
- Non c'è certezza della sua ottimalità, perché $k_1 > 1$.

5. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: UFLP

5.13 Considerazioni finali sull'algoritmo discesa duale

In realtà, la soluzione duale $\mathbf{u}$ *non* è ottima!

La soluzione ottima è $\mathbf{u}^* = (1, 1, 1)$ di valore $g(\mathbf{u}^*) = 3$.

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad [u_i^*] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [k_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[f_j - \textstyle\sum_i (\pi_{ij}-u_i)^+] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Applicando l'euristica primale dual-based a partire da $\mathbf{u}^*$:

- $J(\mathbf{u}^*) = \{ j \in J : \sum_{i \in I} (\pi_{ij} - u_i^*)^+ - f_j = 0\} = \{1, 2, 3\}$.
- $S(\mathbf{u}^*)$ un qualsiasi sottoinsieme di 2 elementi di $J(\mathbf{u}^*)$: $S(\mathbf{u}^*) = \{1, 2\}$ e il vettore $[k_i(S(\mathbf{u}^*))] = (1, 1, 2)$.
- $z(S(\mathbf{u}^*)) = 2$.
- Non c'è certezza della sua ottimalità, perché $k_3 > 1$.

Valutando esaustivamente tutte le soluzioni tuttavia si può verificare che $S(\mathbf{u}^*) = \{1, 2\}$ e $S(\mathbf{u}) = \{2, 3\}$ sono entrambe ottime e di valore $z^* = 2$! E lo è anche la $\{1, 3\}$.

C'è un *duality gap* positivo ($gap = g(u^*) - z^* = 3 - 2 = 1$) tra i valori della soluzione ottima del problema (rilassato) duale e della soluzione ottima del problema di localizzazione degli impianti.

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.1 Premessa

- Riconsideriamo la formulazione del *problema di localizzazione degli impianti capacitato* (CFLP)

$$\min \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} c_{ij} y_{ij} + \sum_{j\in J} f_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i\in I} d_i y_{ij} \le Q_j x_j, \quad \forall j \in J$$

$$y_{ij} \ge 0, \forall i \in I, \forall j \in J; \quad x_j \in \{0,1\}, \forall j \in J$$

- Per UFLP vale la proprietà del *single assignment*; questa *non* è in generale più *vera* nel caso del *problema di localizzazione degli impianti capacitato* (CFLP).

- Nel CFLP, una volta localizzati gli impianti nei siti S, l'*allocazione* dei *clienti* (mercati) agli *impianti* (magazzini) *non* è *banale* come nel UFLP, ma *comporta* la risoluzione del seguente problema *ALLOC* di PL.

(ALLOC)

(rilassamento lineare dell'assegnamento generalizzato)

$$\min \sum_{i\in I}\sum_{j\in S} c_{ij} y_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j\in S} y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i\in I} d_i y_{ij} \le Q_j, \quad \forall j \in S$$

$$y_{ij} \ge 0, \forall i \in I, \forall j \in S$$

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.2 Euristica lagrangiana

- Consideriamo il *rilassamento lagrangiano* della formulazione di CFLP, dualizzando $\sum_{j \in J} y_{ij} = 1,\ \forall\ i \in I$.

$$RL(\boldsymbol{\lambda}) = \min \quad \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} c_{ij} y_{ij} + \sum_{j \in J} f_j x_j + \sum_{i \in I} \lambda_i \left(\sum_{j \in J} y_{ij} - 1 \right)$$

s.t.

$$\sum_{i \in I} d_i y_{ij} \le Q_j x_j, \quad \forall\ j \in J$$

$$0 \le y_{ij} \le 1, \forall i \in I, \forall\ j \in J; \quad x_j \in \{0, 1\}, \forall\ j \in J$$

- Il *problema lagrangiano duale* è:

$$w^* = \max_{\lambda}\ RL(\boldsymbol{\lambda})$$

con λ variabile libera.

- Il *rilassamento lagrangiano* $RL(\boldsymbol{\lambda})$ può essere *decomposto* in $|J|$ *problemi indipendenti* del tipo:

$$RL_j(\boldsymbol{\lambda}) = \min \quad \sum_{i \in I} (c_{ij} + \lambda_i) y_{ij} + f_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{i \in I} d_i y_{ij} \le Q_j x_j$$

$$0 \le y_{ij} \le 1, \forall i \in I; \quad x_j \in \{0, 1\}$$

con

$$RL(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j \in J} RL_j(\boldsymbol{\lambda}) - \sum_{i \in I} \lambda_i$$

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.2 Euristica lagrangiana (segue)

- $RL_j(\boldsymbol{\lambda})$ può essere facilmente *determinato per ispezione*. Infatti:

  a) per $x_j = 0 \Rightarrow RL_j(\boldsymbol{\lambda}) = 0, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{|I|}$

  b) per $x_j = 1 \Rightarrow RL_j(\boldsymbol{\lambda}) = f_j + \boxed{\begin{array}{l} \min \sum_{i\in I} (c_{ij} + \lambda_i)\, y_{ij} \\ \sum_{i\in I} d_i\, y_{ij} \le Q_j \\ 0 \le y_{ij} \le 1, \forall\, i \in I \end{array}}$

  rilassamento lineare del (0;1)-KNAPSACK, risolvibile con algoritmo tipo greedy

- Quindi, $RL_j(\boldsymbol{\lambda}) \le 0, \forall\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{|I|}$ (e può essere negativo solo se $\exists\ \hat{\imath} \in I$ tale che $c_{\hat{\imath}j} + \lambda_{\hat{\imath}} < 0$).

- *A partire da una soluzione* (preferibilmente *ottima*) del problema *lagrangiano duale* $\max_{\boldsymbol{\lambda}} RL(\boldsymbol{\lambda})$ è possibile *costruire una soluzione ammissibile* per CFLP.

<u>Algoritmo euristico lagrangiano</u>

0) Sia $\boldsymbol{\lambda}$ una *soluzione* di $\max_{\boldsymbol{\lambda}} RL(\boldsymbol{\lambda})$ (preferibilmente ottima, ad esempio ottenuta con il metodo del subgradiente).

localizzazione

1) Si costruisca la *lista* L dei *siti* j *ordinati* per *valori non decrescenti* di $RL_j(\boldsymbol{\lambda})$. Si estragga da L il *minimo numero di siti* in modo da soddisfare la domanda totale $\sum_{i\in I} d_i$. Sia S l'insieme di tali siti.

allocazione

2) Si determini l'*allocazione ottima* dei clienti I ai siti S (risolvendo ALLOC) e sia UB($\boldsymbol{\lambda}$) il valore della soluzione ottima.

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.2 Euristica lagrangiana (segue)

- *Esempio*

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 14 \\ 7 & 14 & 5 \\ 4 & 5 & 14 \\ 7 & 14 & 5 \end{bmatrix} \quad [d_i] = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad |J| = 3; |I| = 4$$

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Q_j] = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

  - *Algoritmo euristico lagrangiano*

    Per $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{-10}$, calcoliamo $RL(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j\in J} RL_j(\boldsymbol{\lambda}) - \sum_{i\in I} \lambda_i$

    $[RL_j(\boldsymbol{\lambda})] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} = (3, 1, 2)$

    $RL(\mathbf{-10}) = (-2 + 0 -9) - (-10 -10 -10 -10) = 29 \quad = \mathrm{LB}(\boldsymbol{\lambda})$

    Da L estraggo 3 e 1 di capacità totale ($Q_3 + Q_1 = 14$) non inferiore alla domanda totale $\sum_{i\in I} d_i = 13$.

    Risolvo (ALLOC) con $S = \{1, 3\}$, ottenendo la seguente matrice di allocazione

$$[y_{ij}] = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    che con $S = \{1, 3\}$, fornisce una soluzione di costo $\mathrm{UB}(\boldsymbol{\lambda}) = ((7\ 2/3 + 14\ 1/3) + 5 + 4 + 5) + (8 + 0 + 1) = 32{,}\overline{3}$.

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.2 Euristica lagrangiana (segue)

- Il problema lagrangiano duale $\max_\lambda RL(\lambda)$ può essere risolto con il *metodo* del *subgradiente*:

<u>Algoritmo subgradiente per CFLP</u>

Passo 0: Sia $\varepsilon \geq 0$ il max errore relativo accettabile. Siano: $LB = -\infty$; $UB = \infty$; $k = 1$; $\lambda_i^k = 0, \forall\, i \in I$;

Passo 1: Sia $LB_{CFLP}(\lambda^k) = RL(\lambda^k)$.
Sia $LB = \max\{LB, LB_{CFLP}(\lambda^k)\}$.

Passo 2: Sia $UB_{CFLP}(\lambda^k)$ valore soluzione euristica di CFLP ottenuta applicando l'algoritmo euristico lagrangiano. Sia $UB = \min\{UB, UB_{CFLP}(\lambda^k)\}$.

Passo 3: Se $(UB - LB)/LB \leq \varepsilon$ Stop.

Passo 4: Aggiorna i moltiplicatori di Lagrange:

$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \beta^k\,(\sum_{j\in J} y^k_{ij} - 1), \forall\, i \in I,$ dove

$\beta^k = \alpha\,(UB - LB_{CFLP}(\lambda^k))/\sum_{i\in I}(\sum_{j\in J} y^k_{ij} - 1)^2$ e $\alpha \in (0, 2]$.

Sia $k = k + 1$. Vai al Passo 1.

- L'euristica descritta è particolarmente efficiente. Per $\varepsilon = 1\%$ richiede poche migliaia di iterazioni nel caso di problemi con $|J|$ e $|I| \approx 100$.

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.3 Esercizio

La GOUTTE è un'impresa produttrice di bevande analcoliche operante in Francia. Recentemente l'azienda ha conseguito un inaspettato incremento delle proprie vendite a causa dell'immissione sul mercato di una nuova bevanda gassata che ha incontrato il favore dei giovani consumatori. I dirigenti dell'azienda stanno valutando l'opportunità di aprire un nuovo impianto trasferendovi parte della produzione attualmente realizzata negli altri stabilimenti. Il processo produttivo fa uso di acqua, disponibile ovunque in quantità praticamente illimitata a costo trascurabile, e di essenze e zucchero, che costituiscono una percentuale modesta del peso complessivo dei prodotti finiti.

Per questo motivo, i costi di approvvigionamento sono trascurabili rispetto a quelli di distribuzione del prodotto finito ed i costi di trasporto sono indipendenti dal tipo di prodotto. In Tabella 1 sono riportate le distanze (in Km) tra i potenziali siti produttivi e i mercati. In Tabella 2 sono indicati i costi fissi (in milioni di Euro l'anno) e le capacità (in migliaia di ettolitri l'anno) degli impianti di produzione.

	Punti di domanda											
Siti	Tolosa	Nizza	Marsiglia	Lione	Grenoble	Limoges	Digione	Orleans	Parigi	Lille	Nantes	Brest
Tolosa	**-**	**565**	**401**	**529**	**505**	**295**	**720**	**550**	**817**	**891**	**539**	**855**
Nizza	**-**	**-**	**210**	**474**	**309**	**799**	**665**	**760**	**936**	**1008**	**979**	**1420**
Marsiglia	**-**	**-**	**-**	**309**	**289**	**635**	**500**	**674**	**771**	**949**	**838**	**1255**
Lione	**-**	**-**	**-**	**-**	**114**	**375**	**194**	**377**	**465**	**643**	**579**	**1012**
Limoges	**-**	**-**	**-**	**-**	**431**	**-**	**411**	**259**	**394**	**599**	**293**	**634**
Digione	**-**	**-**	**-**	**-**	**271**	**-**	**-**	**281**	**861**	**450**	**570**	**681**
Parigi	**-**	**-**	**-**	**-**	**553**	**-**	**-**	**117**	**-**	**220**	**378**	**593**
Brest	**-**	**-**	**-**	**-**	**956**	**-**	**-**	**527**	**-**	**705**	**285**	**-**

Tabella 1: Distanze (in Km) tra potenziali siti produttivi e mercati

Siti	*Costi fissi*	*Capacità*
Tolosa	**10**	**30**
Nizza	**15**	**20**
Marsiglia	**18**	**20**
Lione	**20**	**30**
Limoges	**12**	**20**
Digione	**16**	**20**
Parigi	**16**	**30**
Brest	**10**	**30**

Tabella 2: Costi fissi (in 10^6 €/anno) e capacità (in 10^3 hl/anno) degli impianti produttivi

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.3 Esercizio (segue)

La Tabella 3 riassume, invece, i livelli di domanda (in migliaia di ettolitri l'anno) dei distretti di vendita.

Punti di domanda	***Domanda***
Tolosa	**8**
Nizza	**7**
Marsiglia	**6**
Lione	**7**
Grenoble	**8**
Limoges	**4**
Digione	**6**
Orleans	**7**
Parigi	**15**
Lille	**4**
Nantes	**3**
Brest	**5**

Tabella 3: Domande (in 10^3 hl/anno) dei distretti di vendita

Al fine di stabilire il valore minimo del costo logistico totale e poter quindi giudicare se è opportuno aprire un nuovo impianto, la direzione d'impresa vuole effettuare preliminarmente una valutazione della configurazione ottimale degli impianti di produzione per diversi valori del livello di servizio.
In particolare, si vogliono effettuare tre valutazioni relativamente ai casi in cui la massima distanza tra un centro di distribuzione e un mercato è pari a +∞, 700 km, 500 km. Gli autocarri hanno una portata di 150 ettolitri ed un costo (comprensivo della retribuzione dell'equipaggio) di 0,5 €/km.

Progettazione di Reti di Distribuzione

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.3 Esercizio (segue)

- Il problema di localizzazione della GOUTTE può essere schematizzato con il modello CFLP, così formulato:

$$\min \ \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} c_{ij}\, y_{ij} + \sum_{j\in J} f_j\, x_j$$

s.t.

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = 1, \qquad \forall\, i \in I$$

$$\sum_{i\in I} d_i\, y_{ij} \le Q_j\, x_j, \quad \forall\, j \in J$$

$$y_{ij} \ge 0, \quad \forall\, i \in I, \forall\, j \in J; \qquad x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall\, j \in J$$

dove:

- ○ x_j è la *variabile decisionale di attivazione dell'impianto* j;
- ○ y_{ij} è la variabile reale rappresentante la *frazione di allocazione* domanda del mercato i all'impianto j

- ▪ $I = \{$Tolosa, Nizza, Marsiglia, Lione, Grenoble, Limoges, Digione, Orleans, Parigi, Lille, Nantes, Brest$\}$;
- ▪ $J = \{$Tolosa, Nizza, Marsiglia, Lione, Limoges, Digione, Parigi, Brest$\}$;
- ▪ d_i domanda annua del mercato i (vedi Tabella 3);
- ▪ Q_j capacità annua dell'impianto j (vedi Tabella 2);
- ▪ f_j costo fisso impianto j (vedi Tabella 2);
- ▪ t_{ij} costo unitario di trasporto da j a i, con $t_{ij} = (2 \cdot 0{,}5/150)\ \delta_{ij}$ considerando che i veicoli viaggiano a pieno carico (150 hl) da j a i e ritornano a j vuoti, e con δ_{ij} distanza da j a i (vedi Tabella 1);

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.3 Esercizio (segue)

- $c_{ij} = d_i\ t_{ij}$ è il costo di trasporto per rifornire il mercato i attraverso l'impianto j (vedi Tabella 4)

c_{ij}	*Impianti potenziali j*							
Mercati i	Tolosa	Nizza	Marsiglia	Lione	Limoges	Digione	Parigi	Brest
Tolosa	**0,00**	**30,28**	**21,49**	**28,35**	**15,81**	**38,59**	**43,79**	**45,83**
Nizza	**26,50**	**0,00**	**9,85**	**22,23**	**37,47**	**31,19**	**43,90**	**66,60**
Marsiglia	**16,12**	**8,44**	**0,00**	**12,42**	**25,53**	**20,10**	**30,99**	**50,45**
Lione	**24,81**	**22,23**	**14,49**	**0,00**	**17,59**	**9,10**	**21,81**	**47,46**
Grenoble	**27,07**	**16,56**	**15,49**	**6,11**	**23,10**	**14,53**	**29,64**	**51,24**
Limoges	**7,91**	**21,41**	**17,02**	**10,05**	**0,00**	**11,01**	**10,56**	**16,99**
Digione	**28,94**	**26,73**	**20,10**	**7,80**	**16,52**	**0,00**	**34,61**	**27,38**
Orleans	**25,80**	**35,64**	**31,61**	**17,68**	**12,15**	**13,18**	**5,49**	**24,72**
Parigi	**89,55**	**94,07**	**77,49**	**46,73**	**39,60**	**86,53**	**0,00**	**59,60**
Lille	**23,88**	**27,01**	**25,43**	**17,23**	**16,05**	**12,06**	**5,90**	**18,89**
Nantes	**10,83**	**19,68**	**16,84**	**11,64**	**5,89**	**11,46**	**7,60**	**5,73**
Brest	**28,64**	**47,57**	**42,04**	**33,90**	**21,24**	**22,81**	**19,87**	**0,00**

Tabella 4: Costi di trasporto (in 10^3 €/anno)

- Nel caso in cui la massima distanza tra un impianto e un mercato sia infinita la soluzione ottima è $S^* = \{$Tolosa, Limoges, Brest$\}$ ($x^*_1 = 1, x^*_5 = 1, x^*_8 = 1$), e y^*_{ij} come in Tab. 5

y^*_{ij}	*Impianti potenziali j*							
Mercati i	***Tolosa***	Nizza	Marsiglia	Lione	***Limoges***	Digione	Parigi	***Brest***
Tolosa	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Nizza	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Marsiglia	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Lione	**0,14**	0,00	0,00	0,00	**0,86**	0,00	0,00	0,00
Grenoble	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Limoges	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00	0,00	0,00
Digione	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00	0,00	0,00
Orleans	0,00	0,00	0,00	0,00	**0,57**	0,00	0,00	**0,43**
Parigi	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**
Lille	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**
Nantes	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**
Brest	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**

Tabella 5: Allocazioni ottime dei mercati agli impianti attivati

- Il costo logistico annuale risulta pari a 32206,58 mila €.

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.3 Esercizio (segue)

- Utilizzando l'euristica lagrangiana ($\alpha = 1{,}5$) si ha:

Iter. 1:
$\lambda_i^1 = 0$ per $i = 1, \dots, 12$;
$LB_{CFLP}(\lambda^1)) = 0$;
$x^1 = [1; 1; 0; 1; 0; 0; 0; 0]^T$
$UB_{CFLP}(\lambda^1)) = 45173{,}62$ mila €;
$(\sum_{j\in J} y^1_{ij} - 1) = 0$ per $i = 1, \dots, 12$;
$\beta^1 = 5646{,}7$

Iter. 2:
$\lambda_i^2 = -5646{,}7$ per $i = 1, \dots, 12$;
$LB_{CFLP}(\lambda^2)) = -61830{,}7$;
$x^2 = [1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1]^T$
$UB_{CFLP}(\lambda^2)) = 36158{,}90$ mila €;
$(\sum_{j\in J} y^2_{ij} - 1) = [-1; -1; 4{,}33; -0{,}43; -1;7; 4{,}33; -0{,}43; -1;7; 7;7]^T$
$\beta^2 = 617{,}78$

- Alla terza iterazione si ha $UB_{CFLP}(\lambda^3)) = 32206{,}58$ mila € (sol. ottima). Tuttavia $(UB-LB)/LB = 1$, che si riduce a $0{,}122$ dopo 18 iterazioni con $LB = 28276{,}95$ mila €.

- Se la massima distanza impianto/mercato è 700 km allo ottimo gli impianti da attivare sono ancora $S^* = \{$Tolosa, Limoges, Brest$\}$ ($x^*_1 = 1$, $x^*_5 = 1$, $x^*_8 = 1$), e y^*_{ij} come in Tab. 6.

y^*_{ij}	*Impianti potenziali j*							
Mercati i	***Tolosa***	Nizza	Marsiglia	Lione	***Limoges***	Digione	Parigi	***Brest***
Tolosa	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Nizza	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Marsiglia	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Lione	**0,14**	0,00	0,00	0,00	**0,86**	0,00	0,00	0,00
Grenoble	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Limoges	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00	0,00	0,00
Digione	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00	0,00	0,00
Orleans	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**
Parigi	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**
Lille	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00	0,00	0,00
Nantes	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**
Brest	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**

Tabella 6: Allocazioni ottime dei mercati agli impianti attivati (limite a 700 km)

- Il costo logistico annuale risulta pari a 32210,92 mila €, con un incremento annuo di 4340 €.

6. Modelli a singolo prodotto e singolo livello: CFLP

6.3 Esercizio (segue)

- Se la massima distanza impianto/mercato è 500 km la soluzione ottima è invece $S^* = \{\text{Tolosa, Lione, Parigi, Brest}\}$ ($x^*_1 = 1, x^*_4 = 1, x^*_7 = 1, x^*_8 = 1$), e y^*_{ij} come in Tabella 7.

y^*_{ij}	Impianti potenziali *j*							
Mercati i	***Tolosa***	Nizza	Marsiglia	***Lione***	Limoges	Digione	***Parigi***	***Brest***
Tolosa	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Nizza	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00
Marsiglia	**0,67**	0,00	0,00	**0,33**	0,00	0,00	0,00	0,00
Lione	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00
Grenoble	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00
Limoges	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Digione	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00	0,00	0,00	0,00
Orleans	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00
Parigi	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00
Lille	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**	0,00
Nantes	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**
Brest	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**1,00**

Tabella 7: Allocazioni ottime dei mercati agli impianti attivati (limite a 500 km)

- Il costo logistico annuale risulta pari a 56076,05 mila €, con un incremento annuo di 23869,46 mila € rispetto al caso senza limiti sulle distanze impianto/mercato.