2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo

- Quando la domanda viaria nel tempo, il problema della gestione dell'inventario diventa prettamente *dinamico*. e viene detto di *lot-sizing*.

- Consideriamo il caso in cui la *domanda* pur essendo *variabile* nel *tempo*, risulta comunque *nota* in *anticipo*.

- Anche in tale caso in generale è possibile classificare i modelli a seconda se la politica è a revisione continua o a revisione periodica.

- Nel seguito esamineremo il *problema* del *lot sizing* assumendo di adottare la politica a *revisione periodica*.

- Per semplicità considereremo lo scenario di alimentazione a lotti, assenza di ammanco, e ordini di dimensione non limitata.

- Concluderemo accennando ai casi in cui è previsto la possibilità di ammanco con soddisfazione posticipata della domanda (*backlogging*) e il caso con ordini di approvvigionamento limitati.

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

- Orizzonte di pianificazione suddiviso in τ periodi.

<u>Modelli senza backlogging</u>

Per ogni periodo $t = 1, \ldots, \tau$:

- *Parametri* (si assumono tutti interi):
  - d_t: domanda (nota) nel periodo t
  - L_t: tempo di riordino (*lead time*), espresso in multipli della lunghezza del periodo: per semplicità assumiamo $L_t = 0$ (o trascurabile rispetto alla durata di un periodo)
  - K_t: costo fisso di approvv. (emissione ordine)
  - c_t: costo unitario di approvvigionamento
  - h_t: costo per lo stoccaggio di una unità di prodotto dal periodo t al periodo $t + 1$

- *Variabili* :
  - y_t: binaria, rappresenta la decisione di effettuare o meno un ordine di approvvig.
  - q_t: quantità ordinata (lot size)
  - I_t: livello d'inventario alla fine del periodo t

Gestione dell'Inventario

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

- Modello di Wagner-Whitin:

$$\min = \sum_{t=1}^{\tau} (K_t\, y_t + c_t\, q_t + h_t\, I_t)$$

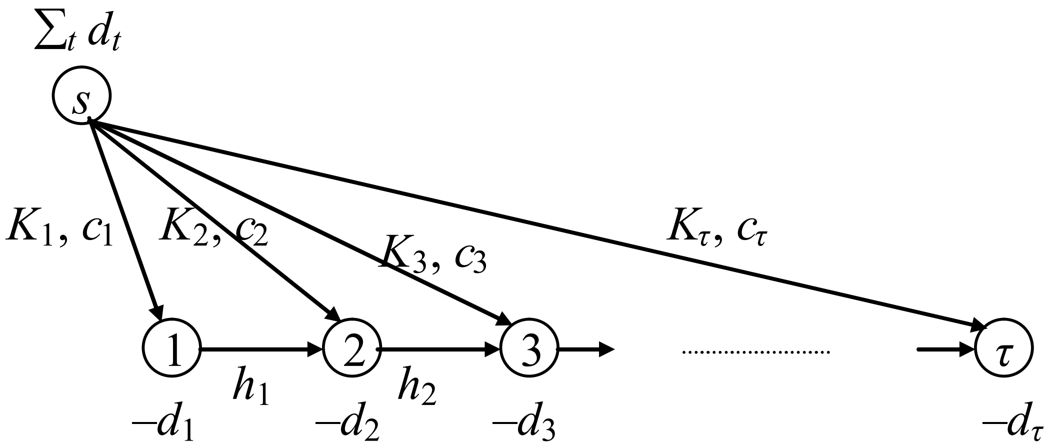
s.t.

$$\begin{aligned}
& q_t + I_{t-1} = d_t + I_t, && t = 1, \dots, \tau \\
& q_t \le M\, y_t, && t = 1, \dots, \tau \\
& q_t, I_t \ge 0, && t = 1, \dots, \tau \\
& y_t \in \{0, 1\}, && t = 1, \dots, \tau
\end{aligned}$$

dove I_0 è il livello d'inventario iniziale assunto pari a 0 e

$$M \ge \sum_{t=1}^{\tau} d_t$$

- Problema è modellabile come problema di flusso a costo minimo, con costi fissi e variabili, sulla seguente rete R



Gestione dell'Inventario

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

- E' possibile eliminare le variabili binarie y_t sostituendo $K_t\, y_t + c_t\, q_t$ con la funzione concava

$$c_t(q_t) = \begin{cases} 0, & \text{se } q_t = 0 \\ K_t + c_t q_t, & \text{se } q_t > 0 \end{cases}$$

- Quindi la f.o. $\sum_{t=1}^{\tau} (k_t\, y_t + c_t\, q_t + h_t\, I_t) = \sum_{t=1}^{\tau} (c_t(q_t) + h_t\, I_t)$.

- Si dimostra che se f.o. è concava (nostro caso) e $I_0 = 0$, esiste una soluzione ottima per il problema di flusso su rete per cui:

$$I_{t-1} \cdot q_t = 0, \qquad t = 1, \ldots, \tau$$

- Politica ottima: *ordinare quando il livello di inventario (all'inizio del periodo) è nullo (zero-inventory policy)*

- Il periodo t per cui $I_t = 0$ è detto *punto di rigenerazione*, in quanto ciò che accade dal periodo $t + 1$ in poi è disaccoppiato da quanto accaduto nei periodi precedenti

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

Conseguenze:

- L'orizzonte temporale di pianificazione può essere *suddiviso in p intervalli*, $[1, r_1]$, $[r_1+1, r_2]$, …, $[r_{p-1}+1, \tau]$, delimitati da p punti di rigenerazione r_h ($h = 0, 1, \ldots, p-1$) consecutivi: $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_{p-1} < \tau$.

- Consideriamo due punti di rigenerazione consecutivi: $r_h = j - 1$ e $r_{h+1} = k$ (con $0 \le h \le p-1$ e $r_p = \tau$ da cui $0 \le j-1 < k \le \tau$) e quindi l'intervallo $[j, k]$

- Nel primo periodo dell'intervallo (periodo j) si effettua un reintegro (a seguito di un ordine) pari alla domanda totale di tutti i periodi dell'intervallo: $D_{jk} = \sum_{i=j}^{k} d_i$

- Il costo del programma di inventario dell'intervallo è indipendente da quello degli altri e pari a:

$$C_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{i=j}^{k} d_i = 0 \\ K_j + c_j \sum_{i=j}^{k} d_i + \sum_{\ell=j}^{k-1} h_\ell \sum_{i=\ell+1}^{k} d_i, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. Politiche di gestione delle scorte

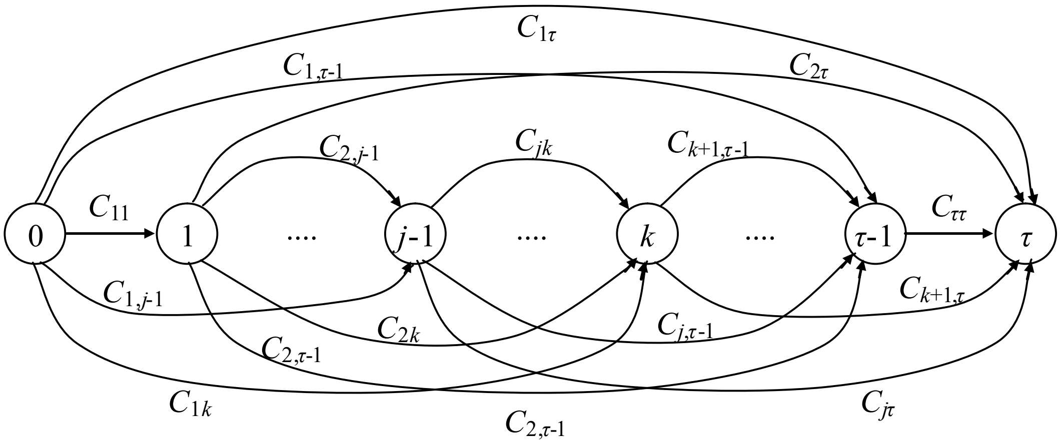
2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

- Detto F_k il minimo costo totale del programma di inventario per i primi k periodi, tale che $I_k = 0$, è possibile scrivere la seguente relazione ricorsiva di *programmazione dinamica*:

$$F_k = \min_{0 \le j \le k-1} \{F_j + C_{j+1,k}\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tau,$$

dove $F_0 = 0$, in base alla quale la programmazione ottima ha costo $F_\tau = \min_{0 \le j \le \tau-1} \{F_j + C_{j+1,\tau}\}$

- Noti i valori di $C_{j+1,k}$, con $0 \le j < k \le \tau$, è possibile ricondurre il problema di determinare F_τ a quello del cammino di costo minimo sul digrafo aciclico $D = (N, A)$ pesato sugli archi, dove $N = \{0, 1, 2, \ldots, \tau\}$ e $(j, k) \in A$, per ogni $0 \le j < k \le \tau$, e il costo dell'arco è $c_{jk} = C_{j+1,k}$



- F_k è il costo del cammino minimo dal nodo 0 al nodo k

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

- E' facile verificare che c'è una corrispondenza biunivoca tra i cammini dal nodo 0 al nodo τ sul digrafo D e le soluzioni ammissibili per il problema di flusso a costo minimo definito sulla rete R e tali per cui:

$$I_{t-1} \cdot q_t = 0, \qquad t = 1, \ldots, \tau$$

- In particolare un tale cammino su D che attraversi gli archi $(0, r_1), (r_1, r_2), \ldots, (r_{p\text{-}1}, \tau)$ è associato alla soluzione in cui l'orizzonte di pianificazione è suddiviso negli intervalli $[1, r_1], [r_1+1, r_2], \ldots, [r_{p\text{-}1}+1, \tau]$, in cui si reintegra l'inventario esattamente nel primo periodo di ciascuno intervallo, cioè nei periodi $1, r_1+1, r_2+1, \ldots, r_{p\text{-}1}+1$, e rispettivamente per:

$$q_1 = \sum_{i=1}^{r_1} d_i;\ q_{r_1+1} = \sum_{i=r_1+1}^{r_2} d_i;\ q_{r_2+1} = \sum_{i=r_2+1}^{r_3} d_i;\ \ldots;\ q_{r_{p\text{-}1}+1} = \sum_{i=r_{p\text{-}1}+1}^{\tau} d_i$$

e il cui costo è pari al costo $C_{1r_1} + C_{r_1+1,r_2} + \ldots + C_{r_{p\text{-}1}+1,\tau}$ del cammino.

- Il cammino di costo minimo su D dà la soluzione ottima.
- Se $I_0 > 0$ il metodo continua a funzionare. E' sufficiente modificare opportunamente la sequenza delle domande:

$d'_1 := \max\{0; d_1 - I_0\}$ e $I_0 := I_0 - d_1$;

…

$d'_i := \max\{0; d_i - I_0\}$ e $I_0 := I_0 - d_i$, terminando se $I_0 \leq 0$

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

Esempio

- Prodotto stagionale con periodo di vendita di $\tau = 6$ mesi

t	1	2	3	4	5	6
d_t	60	100	140	200	120	80
K_t	150	140	160	160	170	190
c_t	7	7	8	7	6	10
h_t	1	1	2	2	2	2

- $I_0 = 0$
- non sono ammessi ammanchi
- Occorre pianificare gli approvvigionamenti nel semestre assumendo i lead time $L_t << 1$ mese
- Ricordando che $C_{jk} = K_j + c_j \sum_{i=j}^{k} d_i + \sum_{\ell=j}^{k-1} h_\ell \sum_{i=\ell+1}^{k} d_i$, si ha:

$F_0 = \underline{0}$;

$F_1 = F_0 + C_{11} = 0 + (150 + 7\cdot 60 + 0) = \underline{570}$;

$F_2 = \min_{j=0,1}\{F_j + C_{j+1,2}\} = \min \{$

$F_0 + C_{12} \;= 0 + (150 + 7\cdot(60+100) + 1\cdot 100) = 1370;$

$F_1 + C_{22} \;= 570 + (140 + 7\cdot 100 + 0) = 1410$

$\} = \underline{1370}$;

$F_3 = \min_{j=0,1,2}\{F_j + C_{j+1,3}\} = \min \{$

$F_0 + C_{13} \;= 0 + (150 + 7\cdot(60+100+140) + [1\cdot(100+140)+ 1\cdot(140)]) = 2630;$

$F_1 + C_{23} \;= 570 + (140 + 7\cdot(100+140) + 1\cdot 140) = 2530;$

$F_2 + C_{33} \;= 1370 + (160 + 8\cdot 140 + 0) = 2650$

$\} = \underline{2530}$;

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

$F_4 = \min_{j=0,1,2,3}\{F_j + C_{j+1,4}\} = \min\{$

$F_0 + C_{14} = 0 + (150 + 7\cdot(60+100+140+200) + [1\cdot(100+140+200) + 1\cdot(140+200) + 2\cdot200]) = 4830;$

$F_1 + C_{24} = 570 + (140 + 7\cdot(100+140+200) + [1\cdot(140+200) + 2\cdot200]) = 4530;$

$F_2 + C_{34} = 1370 + (160 + 8\cdot(140+200) + 2\cdot200) = 4650;$

$F_3 + C_{44} = 2530 + (160 + 7\cdot200 + 0) = 4090$

$\} = \underline{4090};$

$F_5 = \min_{j=0,1,2,3,4}\{F_j + C_{j+1,5}\} = \min\{$

$F_0 + C_{15} = 0 + (150 + 7\cdot(60+100+140+200+120) + [1\cdot(100+140+200+120) + 1\cdot(140+200+120) + 2\cdot(200+120) + 2\cdot120]) = 6390;$

$F_1 + C_{25} = 570 + (140 + 7\cdot(100+140+200+120) + [1\cdot(140+200+120) + 2\cdot(200+120) + 2\cdot120]) = 5970;$

$F_2 + C_{35} = 1370 + (160 + 8\cdot(140+200+120) + [2\cdot(200+120) + 2\cdot120]) = 6090;$

$F_3 + C_{45} = 2530 + (160 + 7\cdot(200+120) + 2\cdot120) = 5170;$

$F_4 + C_{55} = 4090 + (170 + 6\cdot(120) + 0) = 4980$

$\} = \underline{4980};$

$F_6 = \min_{j=0,1,2,3,4,5}\{F_j + C_{j+1,6}\} = \min\{$

$F_0 + C_{16} = 0 + (150 + 7\cdot(60+100+140+200+120+80) + [1\cdot(100+140+200+120+80) + 1\cdot(140+200+120+80) + 2\cdot(200+120+80) + 2\cdot(120+80) + 2\cdot80]) = 7590;$

$F_1 + C_{26} = 570 + (140 + 7\cdot(100+140+200+120+80) + [1\cdot(140+200+120+80) + 2\cdot(200+120+80) + 2\cdot(120+80) + 2\cdot80]) = 7090;$

$F_2 + C_{36} = 1370 + (160 + 8\cdot(140+200+120+80) + [2\cdot(200+120+80) + 2\cdot(120+80) + 2\cdot80]) = 7210;$

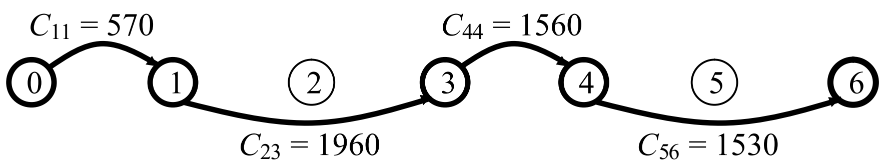
$F_3 + C_{46} = 2530 + (160 + 7\cdot(200+120+80) + [2\cdot(120+80) + 2\cdot80]) = 6050;$

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

$F_4 + C_{56} = 4090 + (170 + 6\cdot(120+80) + 2\cdot 80) = 5620;$
$F_5 + C_{66} = 4980 + (190 + 10\cdot 80 + 0) = 5970$
$\} = \underline{5620};$

ultimo periodo con $I_j = 0$ j	ultimo periodo di approvv. $j+1$	indice k estremo destro del sottointervallo $[1, k]$ dell'orizzonte di pianificazione					
		1	2	3	4	5	6
0	1	570	1370	2630	4830	6390	7590
1	2		1410	2530	4530	5970	7090
2	3			2650	4650	6090	7210
3	4				4090	5170	6050
4	5					4980	5620
5	6						5970
F_k		570	1370	2530	4090	4980	5620
r^*_k		0	0	1	3	4	4
$r^*_k + 1$		1	1	2	4	5	5



- La tabella riporta i valori $F_j + C_{j+1,k}$, e gli indici
  $r^*_k = \text{arg-min}_{0\leq j\leq k-1} \{F_j + C_{j+1,k}\}$
- L'indice $r^*_k + 1$ è quello del periodo in cui è stato fatto l'ultimo approvvigionamento (nella politica ottima per il sottointervallo $[1, k]$)
- In definitiva ci si approvvigiona in:
  $t = 1$ per $q_1 = d_1 = 60;$
  $t = 2$ per $q_2 = d_2 + d_3 = 100 + 140 = 240;$
  $t = 4$ per $q_4 = d_4 = 200;$
  $t = 5$ per $q_5 = d_5 + d_6 = 120 + 80 = 200.$
- La figura mostra il cammino di costo minimo associato alla politica ottima

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

- Altre strategie (euristiche) di lot sizing:
  - L4L Lot-for-Lot:
    Approvvigionamento (con un ordine anticipato nel caso di lead time non trascurabile) per un quantitativo pari al fabbisogno netto nel periodo, $q_t = \max\{0; d_t - I_{t-1}\}$. A regime (dopo esaurimento scorta iniziale) assicura zero-inventory alla fine di ogni periodo. N.B.: soluzione ottima per $h_t \to\infty$.
  - FOQ Fixed-Order-Quantity:
    Approvvigionamento (con un ordine anticipato nel caso di lead time non trascurabile) per un quantitativo pari ad un multiplo di un ammontare prefissato q' ($q_t = n_t\, q'$, tale che $(n_t - 1)\, q' < d_t - I_{t-1} \le n_t\, q'$), se $d_t - I_{t-1} > 0$.
    Un caso particolare si ottiene ponendo $q' = EOQ$, con $EOQ = \mathrm{sqrt}(2KD/H)$, dove K, D e H sono i rispettivi valori medi di K_t, d_t, e h_t nell'orizzonte temporale pianificato.
  - FOP Fixed-Order-Period:
    Approvvigionamento (con un ordine anticipato nel caso di lead time non trascurabile) con cadenza temporale θ prefissata per un quantitativo variabile pari a $q_t = \sum^{\theta}_{h=1} d_{t+h-1} - I_{t-1}$.
    Si può ad esempio fissare $\theta = EOP = EOQ/D$.
    N.B.: L4L è un esempio di politica FOP.

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

- Altre strategie (euristiche) di lot sizing:
  - Silver-Meal heuristic:

    Si basa sulla valutazione del costo medio per periodo $C_t(k)$ assumendo di effettuare al periodo t un approvvigionamento $q_t = \sum_{i=t}^{t+k-1} d_i$, pari alla domanda di k periodi consecutivi a partire da t:

    $$C_t(k) = (K_t + c_t \sum_{i=t}^{t+k-1} d_i + \sum_{\ell=t}^{t+k-2} h_\ell \sum_{i=\ell+1}^{t+k-1} d_i)/k$$

    Si esaminano i valori $C_t(k)$ per $k = 1, 2, \ldots, s, s+1 \leq \tau-t+1$ arrestando la ricerca quando $C_t(s+1) > C_t(s)$, decidendo di approvv. per $q_t = \sum_{i=t}^{t+s-1} d_i$, per un costo nell'intervallo $[t, t+s-1]$ pari a $s \cdot C_t(s)$ e ripartendo poi con il calcolo nei periodi successivi ponendo $t = t + s$.

  - Least-Unit-Cost heuristic:

    Analoga alla precedente ma valutando il costo per unità di domanda:

    $$C'_t(k) = (K_t + c_t \sum_{i=t}^{t+k-1} d_i + \sum_{\ell=t}^{t+k-2} h_\ell \sum_{i=\ell+1}^{t+k-1} d_i)/ \sum_{i=t}^{t+k-1} d_i$$

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

Modelli con backlogging

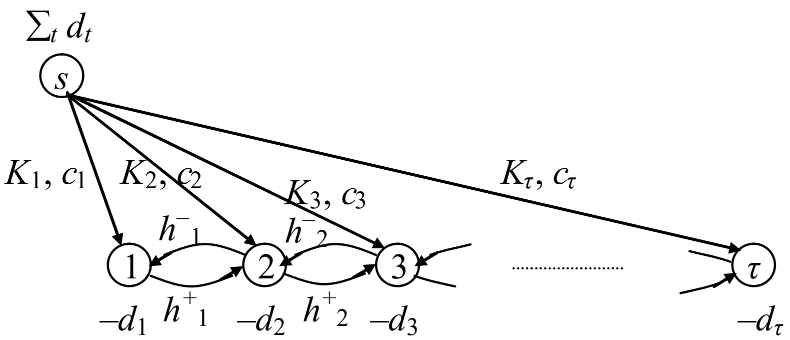
- Caratterizzano i casi in cui è possibile soddisfare la domanda di un periodo t nei periodi successivi (backlogging)
- Tipicamente il *backlog* I^-_t, cioè la quota di ammanco nel periodo t, presenta un costo h^-_t unitario (tipicamente superiore al costo di stoccaggio)
- Modello di Zangwill:

$$\min = \sum_{t=1}^{\tau} (K_t\, y_t + c_t\, q_t + h^+_t I^+_t + h^-_t I^-_t)$$

s.t.

$$
\begin{aligned}
& q_t + I^+_{t-1} + I^-_t = d_t + I^+_t + I^-_{t-1}, && t = 1, \dots, \tau \\
& q_t \le M\, y_t, && t = 1, \dots, \tau \\
& q_t, I^+_t, I^-_t \ge 0, && t = 1, \dots, \tau \\
& y_t \in \{0, 1\}, && t = 1, \dots, \tau
\end{aligned}
$$

- Problema modellabile come problema di flusso a costo minimo, con costi fissi e var., sulla seguente rete R assumendo per semplicità (e s.p.d.g.) $I^+_{t-1} = I^-_{t-1} = 0$.



2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

- Anche in tal caso è possibile decomporre la soluzione in intervalli indipendenti di pianificazione.

- Analogamente al caso senza backlogging si può formulare il problema in termini di PD e ricondurlo a quello di cammino minimo su digrafo aciclico.

- Risulta però più complessa la determinazione dei costi degli archi del digrafo in quanto in presenza di backlog non è detto che convenga sempre approvviggionarsi all'inizio dell'intervallo.

- Consideriamo due punti di rigenerazione consecutivi $r_h = j - 1$ e $r_{h+1} = k$ (con $0 \leq j - 1 < k \leq \tau$) e quindi l'intervallo $[j, k]$ e assumiamo che si effettui l'ordine nel periodo t, $j \leq t \leq k$; il costo del programma di inventario dell'intervallo è:

$$C_{jkt} = K_t + c_t \sum_{i=j}^{k} d_i + \sum_{\ell=t}^{k-1} h^+{}_\ell \sum_{i=\ell+1}^{k} d_i + \sum_{\ell=j}^{t-1} h^-{}_\ell \sum_{i=j}^{\ell} d_i$$

e quindi:

$$C_{jk} = \min_{j \leq t \leq k} \{C_{jkt}\}$$

calcolabile nel caso peggiore in $O(\tau)$.

Gestione dell'Inventario

2. Politiche di gestione delle scorte

2.5. Modelli singolo punto, singolo prodotto, domanda deterministica variabile nel tempo (segue)

<u>Altre generalizzazioni</u>: capacità di approvvig. Q limitata

- Modello di Florian-Klein (generalizza Wagner-Whitin):

$$\min = \sum_{t=1}^{\tau} (K_t\, y_t + c_t\, q_t + h_t\, I_t)$$

s.t.

$$\begin{aligned} & q_t + I_{t-1} = d_t + I_t, && t = 1, \ldots, \tau \\ & q_t \leq Q\, y_t, && t = 1, \ldots, \tau \\ & q_t, I_t \geq 0, && t = 1, \ldots, \tau \\ & y_t \in \{0, 1\}, && t = 1, \ldots, \tau \end{aligned}$$

  dove I_0 è il livello d'inventario iniziale assunto pari a 0.

- L'approccio risolutivo è concettualmente analogo a quello per il modello di Wagner-Whitin. Anche in tal caso è possibile decomporre l'orizzonte di pianificazione in intervalli indipendenti di pianificazione
- Dati due punti di rigenerazione consecutivi $r_h = j - 1$ e $r_{h+1} = k$ (con $0 \leq j - 1 < k \leq \tau$) e quindi l'intervallo $[j, k]$
- Si dimostra che il valore di costo C_{jk} dell'intervallo $[j, k]$ può essere ottenuto risolvendo un problema di cammino minimo su una digrafo aciclico con struttura a griglia in cui il numero dei nodi e degli archi è $O((k - j)\lceil D_{jk}/Q \rceil)$, dove D_{jk} è la domanda nell'intervallo considerato.