Esercizio 1

1) Formulazione

Si considerano i seguenti insiemi $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$dei possibili punti di vendita e $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dei bacini di utenza. Si considerano i seguenti ulteriori parametri: profitto π_{ij} derivante dall'allocazione completa del bacino di utenza i al punto di vendita j; costo fisso f_j di attivazione del punto vendita j.

Il problema da risolvere corrisponde al problema di localizzazione degli impianti (UFLP) la cui formulazione matematica (UFL) è la seguente.

Si considerano le variabili decisionali binarie di attivazione x_j dei punti di vendita j e di allocazione y_{ij} dei bacini di utenza i ai punti di vendita j.

(UFL)

$\max z = \sum^{6}_{i=1}\sum^{5}_{j=1} \pi_{ij}\, y_{ij} - \sum^{5}_{j=1} f_j\, x_j$

s.t.

$\sum^{5}_{j=1} y_{ij} = 1$, per $i = 1, \ldots, 6$;

$y_{ij} \le x_j$, per $i = 1, \ldots, 6$, e per $j = 1, \ldots, 5$;

$y_{ij} \ge 0$, per $i = 1, \ldots, 6$, e per $j = 1, \ldots, 5$;

$x_j \in \{0,1\}$, per $j = 1, \ldots, 5$.

La f.o. da massimizzare è pari al profitto totale dovuto al soddisfacimento della domanda in base alle allocazioni, diminuito del costo fisso totale di attivazione dei punti di vendita.

Il primo vincolo rappresenta il soddisfacimento della domanda di ogni bacino di utenza i espresso come allocazione totale di i ai punti vendita pari al 100%.

Il secondo vincolo impone allocazioni nulle ai punti di vendita non attivati.

2) Soluzione greedy

L'algoritmo greedy esegue al più $n = 5$ iterazioni, in cui ad ogni iterazione si individua l'impianto (punto di vendita) più profittevole da attivare oltre a quelli attivati nelle iterazioni precedenti. L'algoritmo termina quando l'attivazione di un ulteriore impianto non comporta aumento del profitto netto, o perché non vi sono più impianti attivabili.

Durante l'applicazione dell'algoritmo greedy calcoliamo anche il valore $g(\bar{\mathbf{u}}(S_t))$ del problema duale DRL(UFL) del rilassamento lineare RL(UFL) di UFL associato alla soluzione ammissibile S_t di UFLP calcolata all'iterazione t il cui profitto è $z(S_t) = \sum_{i\in I} \max_{j\in S_t} [\pi_{ij}] - \sum_{j\in J} f_j$.

Si ricorda che in generale $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^+ - f_j]^+$, e che scegliendo $u_i = \bar{u}_i(S) = \max_{j\in S} [\pi_{ij}]$ si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j]^+$.

Inoltre, siccome per $j \notin S$ abbiamo che $\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j = \rho_j(S) = z(S \cup \{j\}) - z(S)$, mentre per $j \in S$ è pari a zero, si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J\setminus S} [\rho_j(S)]^+$.

Inizializzazione algoritmo greedy:

$S_0 = \varnothing$, $z(S_0) = 0$

Iter. $t = 1$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_0 \cup \{j\})$:	**23**	14	23	22	19
$\rho_j(S_0)$:	**23**	14	23	22	19

$S_1 = \{1\}$, $z(S_1) = 23$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_1)) = 26 + 17 = 43$

Iter. $t = 2$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_1 \cup \{j\})$:	-	24	**33**	25	27
$\rho_j(S_1)$:	-	1	**10**	2	4

$S_2 = \{1, 3\}$, $z(S_2) = 33$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_2)) = 38 + 0 = 38$

Iter. $t = 3$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_2 \cup \{j\})$:	-	31	-	32	29
$\rho_j(S_2)$:	-	-2	-	-1	-4

Nessun miglioramento. Stop. Pertanto la soluzione greedy è
$S^G = S_2 = \{1, 3\}$ di profitto $z(S^G) = 33$.
Mentre il miglior UB trovato è pari a $\min\{g(\bar{\mathbf{u}}(S_1)), g(\bar{\mathbf{u}}(S_2))\} = 38$.
La soluzione ottima sarà quindi di valore z^* compreso tra 33 e 38.

3) Algoritmo di scambio.
Siccome non possiamo essere certi che S^G sia ottima ($z(S^G) = 33 < UB = 38$), proviamo a cercare una soluzione di profitto maggiore applicando l'algoritmo di scambio.

Algoritmo di scambio
Iter 1:

Cerchiamo una soluzione migliore (di profitto maggiore) di $S^G = \{1, 3\}$ nell'intorno $N(S^G)$ di S^G definito dall'insieme delle soluzioni di UFL ottenibili da S^G con le seguenti operazioni di scambio:

(i) $S^G \cup \{j\}$;
(ii) $S^G \setminus \{h\}$;
(iii) $S^G \setminus \{h\} \cup \{j\}$.

Con operazioni di tipo (i) otteniamo soluzioni nell'insieme $N(S^G)$ già esaminate dall'algoritmo greedy alla iter. 3 e quindi non migliori di S^G.
Con operazioni di tipo (ii) otteniamo soluzioni nell'insieme $N(S^G)$ già esaminate dall'algoritmo greedy alla iter. 1 e quindi non migliori di S^G.
Con operazioni di tipo (iii) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S^G)$:

$S^G \setminus \{1\} \cup \{2\} = \{2, 3\}$ $z(\{2, 3\}) = 25 \leq z(S^G) = 33$
$S^G \setminus \{1\} \cup \{4\} = \{3, 4\}$ $z(\{3, 4\}) = 31 \leq z(S^G) = 33$
$S^G \setminus \{1\} \cup \{5\} = \{3, 5\}$ $z(\{3, 5\}) = 22 \leq z(S^G) = 33$
$S^G \setminus \{3\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)
$S^G \setminus \{3\} \cup \{4\} = \{1, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)
$S^G \setminus \{3\} \cup \{5\} = \{1, 5\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2).

Pertanto nell'insieme $N(S^G)$ non abbiamo trovato soluzioni migliori della corrente S^G. Stop.

La soluzione $S^G = \{1, 3\}$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione i valori $x^*_j = 1, 0, 1, 0, 0$) è pertanto un ottimo locale (rispetto al suo intorno $N(S^G)$) per UFL, insieme alla allocazione ottima che si ottiene allocando i punti di domanda ai distributori in S^G in modo da massimizzare il profitto.
In particolare il punto di domanda:

- $i = 1$ viene allocato al punto vendita $j = 1$ (quindi, $y^*_{1j} = 1, 0, 0, 0, 0$);

- $i = 2$ viene allocato al punto vendita $j = 3$ (quindi, $y^*_{2j} = 0, 0, 1, 0, 0$);
- $i = 3$ viene allocato al punto vendita $j = 1$ (quindi, $y^*_{3j} = 1, 0, 0, 0, 0$);
- $i = 4$ viene allocato al punto vendita $j = 1$ (quindi, $y^*_{4j} = 1, 0, 0, 0, 0$);
- $i = 5$ viene allocato al punto vendita $j = 3$ (quindi, $y^*_{5j} = 0, 0, 1, 0, 0$);
- $i = 6$ viene allocato al punto vendita $j = 1$ (quindi, $y^*_{6j} = 1, 0, 0, 0, 0$).

4) Verifica bontà soluzione trovata.

Per valutare la bontà della soluzione $S = \{1, 3\}$ occorre, ad esempio, valutare l'errore relativo $gap = [z^*(\text{UFL}) - z(S)]/ z^*(\text{UFL})$. Chiaramente non disponiamo di $z^*(\text{UFL})$, pertanto possiamo solo valutare per eccesso l'errore relativo sapendo che

$[z^*(\text{UFL}) - z(S)]/ z^*(\text{UFL}) = 1 - z(S)/ z^*(\text{UFL}) \leq 1 - z(S)/ \text{UB} = [\text{UB} - z(S)]/\text{UB}$.

Per il momento il miglior UB a nostra disposizione è pari a 38. Cerchiamo di migliorarlo (cioè diminuirlo) con l'algoritmo di discesa duale.

L'algoritmo di discesa duale determina una buona soluzione del problema DRL(UFL)) che è il duale del rilassamento lineare RL(UFL) della formulazione (UFL).

L'algoritmo esamina soluzioni del duale per cui la f.o. $g(\cdot)$ è esprimibile solo come somma delle variabili duali u_i, cioè $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i$. Questo si verifica quando i valori $\theta_j = f_j - \sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^+$ sono non-negativi. Chiamiamo ammissibili queste soluzioni.

L'algoritmo a partire dalla soluzione ammissibile con le variabili duali $u_i = \bar{u}_i(J) = \max_{j\in J} [\pi_{ij}]$ (cioè pari al massimo di riga i della matrice dei profitti $\{\pi_{ij}\}$) si muove lungo direzioni di discesa della f.o. mantenendo l'ammissibilità per le u_i, decrementando una alla volta e ciclicamente le u_i fino al successivo massimo della riga i della matrice $\{\pi_{ij}\}$. L'algoritmo in generale si arresta quando si è tentato invano di diminuire tutte le variabili duali.

Nella tabella è riportata la traccia dell'esecuzione dell'algoritmo di discesa duale. In rosso sono riportate le iterazioni che conducono a soluzioni non ammissibili.

Iter.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$g(\mathbf{u})$
0	8	8	3	8	8	8	3	6	2	3	5	43
1	5	8	3	8	8	8	3	3	2	3	5	40
2	5	6	3	8	8	8	3	3	0	3	3	38
3	5	6	2	8	8	8	3	2	0	2	2	37
4	5	6	2	7	8	8	3	2	0	1	2	36
5	5	6	2	7	$8-\varepsilon$	8	3	2	$-\varepsilon$	1	2	-
6	5	6	2	7	8	7	2	2	0	1	2	35
7	3	6	2	7	8	7	0	0	0	1	2	33

E' inutile proseguire perché non riusciremmo a determinare per $g(\mathbf{u})$ valori più piccoli di 33, in quanto sappiamo che per la dualità

$z(S) \leq z^*(\text{UFL}) \leq z^*(\text{RL(UFL)}) = g^*(\text{DRL(UFL)}) \leq g(\mathbf{u})$

e abbiamo determinato $z(S^G) = 33$ e $g(\mathbf{u}) = 33$.

Questo dimostra anche che la soluzione $S^G = \{1, 3\}$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione $x^*_j = 1, 0, 1, 0, 0$, e alle variabili di allocazione i valori y^*_{ij} determinati al punto 3 in modo da massimizzare i profitti dell'allocazione dei punti di domanda ai punti di vendita in S^G) è una soluzione ottima per UFL.

5) Calcolo di una (possibilmente) nuova soluzione con l'approccio euristico dual-based.

Data la soluzione duale ottenuta al punto 4): $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = (3, 6, 2, 7, 8, 7)$, con $g(\mathbf{u}) = 33$.

L'insieme $J(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = -\theta_j = 0\} = \{1, 2, 3\}$.

Essendo $S(\mathbf{u})$ l'insieme minimale contenuto in $J(\mathbf{u})$ tale che per ogni $i \in I$ esiste un $j \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$, si ha $S(\mathbf{u}) = \{1, 3\}$.

Calcoliamo $k_i(S(\mathbf{u})) = |\{ j \in S(\mathbf{u}) : \pi_{ij} > u_i\}|$, cioè $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = (1, 1, 0, 0, 0, 1)$. Siccome $k_i \leq 1$ per ogni $i \in I$, la soluzione associata a $S(\mathbf{u}) = \{1, 3\}$ è ottima. Si noti inoltre che $z(S(\mathbf{u})) = 33$.

Esercizio 2

1) Formulazione
Si considerano i seguenti insiemi $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dei possibili siti per i magazzini e $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ di clienti. Si considerano i seguenti ulteriori parametri: profitto $\pi_{ij} = (r_{ij} - t_{ij})$ derivante dall'allocazione completa del cliente i al magazzino j; costo fisso f_j di attivazione del magazzino j.
Il problema da risolvere corrisponde al problema di localizzazione degli impianti (UFL) la cui formulazione matematica è la seguente.
Si considerano le variabili decisionali binarie di attivazione x_j dei magazzini j e di allocazione y_{ij} dei clienti i ai magazzini j.

(UFL)
$\max z = \sum^7_{i=1}\sum^5_{j=1} \pi_{ij}\, y_{ij} - \sum^5_{j=1} f_j\, x_j$
s.t.
$\sum^5_{j=1} y_{ij} = 1$, per $i = 1, \ldots, 7$;
$y_{ij} \le x_j$, per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1, \ldots, 5$;
$y_{ij} \ge 0$, per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1, \ldots, 5$;
$x_j \in \{0,1\}$, per $j = 1, \ldots, 5$.

La f.o. da massimizzare è pari al profitto totale dovuto al soddisfacimento della domanda dei clienti in base alle allocazioni, diminuito del costo fisso totale di attivazione dei magazzini.
Il primo vincolo rappresenta il soddisfacimento della domanda di ogni cliente i espresso come allocazione totale di i ai magazzini pari al 100%.
Il secondo vincolo impone allocazioni nulle ai magazzini non attivati.

La matrice dei profitti in base all'espressione $\pi_{ij} = r_{ij} - t_{ij}$ (ricavi vendita r_{ij} – costi assicurazione t_{ij}) è

$$[\pi_{ij}] = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Per completezza riportiamo anche il vettore dei costi fissi f_j di attivazione dei magazzini

$$[f_j] = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

2) Soluzione greedy
L'algoritmo greedy esegue al più $n = 5$ iterazioni, in cui ad ogni iterazione si individua l'impianto (punto di vendita) più profittevole da attivare oltre a quelli attivati nelle iterazioni precedenti.
L'algoritmo termina quando l'attivazione di un ulteriore impianto non comporta aumento del profitto netto, o perché non vi sono più impianti attivabili.
Durante l'applicazione dell'algoritmo greedy calcoliamo anche il valore $g(\bar{\mathbf{u}}(S_t))$ del problema duale DRL(UFL) del rilassamento lineare RL(UFL) di UFL associato alla soluzione ammissibile S_t di UFLP calcolata all'iterazione t il cui profitto è $z(S_t) = \sum_{i\in I} \max_{j\in S_t} [\pi_{ij}] - \sum_{j\in J} f_j$.
Si ricorda che in generale $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^+ - f_j]^+$, e che scegliendo $u_i = \bar{u}_i(S) = \max_{j\in S} [\pi_{ij}]$ si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j]^+$.
Inoltre, siccome per $j \notin S$ abbiamo che $\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j = \rho_j(S) = z(S \cup \{j\}) - z(S)$, mentre per $j \in S$ è pari a zero, si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J\setminus S} [\rho_j(S)]^+$.

Inizializzazione algoritmo greedy:

$S_0 = \emptyset$, $z(S_0) = 0$

Iter. $t = 1$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_0 \cup \{j\})$:	14	7	13	**15**	14
$\rho_j(S_0)$:	14	7	13	**15**	14

$S_1 = \{4\}$, $z(S_1) = 15$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_1)) = 17 + 5 = 22$

Iter. $t = 2$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_1 \cup \{j\})$:	16	13	**17**	-	17
$\rho_j(S_1)$:	1	-2	**2**	-	2

$S_2 = \{3, 4\}$, $z(S_2) = 17$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_2)) = 19 + 3 = 22$

Iter. $t = 3$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_2 \cup \{j\})$:	18	16	-	-	**19**
$\rho_j(S_2)$:	1	-2	-	-	**2**

$S_3 = \{3, 4, 5\}$, $z(S_3) = 19$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_3)) = 22 + 0 = 22$

Iter. $t = 4$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_3 \cup \{j\})$:	19	17	-	-	-
$\rho_j(S_3)$:	0	-2	-	-	-

Nessun miglioramento. Stop. Pertanto la soluzione greedy è
$S^G = S_3 = \{3, 4, 5\}$ di profitto $z(S^G) = 19$.
Mentre il miglior UB trovato è pari a $\min_t\{g(\bar{\mathbf{u}}(S_t))\} = 22$.
La soluzione ottima sarà quindi di valore z^* compreso tra 19 e 22.

3) Algoritmo di scambio.
Siccome non possiamo essere certi che S^G sia ottima ($z(S^G) = 19 <$ UB $= 22$), proviamo a cercare una soluzione di profitto maggiore applicando l'algoritmo di scambio.

Algoritmo di scambio
Iter 1:

Cerchiamo una soluzione migliore (di profitto maggiore) di $S^G = \{3, 4, 5\}$ nell'intorno $N(S^G)$ di S^G definito dall'insieme delle soluzioni di UFL ottenibili da S^G con le seguenti operazioni di scambio:

(i) $S^G \cup \{j\}$;
(ii) $S^G \setminus \{h\}$;
(iii) $S^G \setminus \{h\} \cup \{j\}$.

Con operazioni di tipo (i) otteniamo soluzioni nell'insieme $N(S^G)$ già esaminate dall'algoritmo greedy alla iter. 4 e quindi non migliori di S^G.

Con operazioni di tipo (ii) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S^G)$:

$S^G \setminus\{3\} = \{4, 5\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)

$S^G \setminus\{4\} = \{3, 5\}$ $z(\{3, 5\}) = 18 \leq z(S^G) = 19$

$S^G \setminus\{5\} = \{3, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)

Con operazioni di tipo (iii) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S^G)$:

$S^G \setminus\{3\} \cup \{1\} = \{1, 4, 5\}$ $z(\{1, 4, 5\}) = 17 \leq z(S^G) = 19$

$S^G \setminus\{3\} \cup \{2\} = \{2, 4, 5\}$ $z(\{2, 4, 5\}) = 15 \leq z(S^G) = 19$

$S^G \setminus\{4\} \cup \{1\} = \{1, 3, 5\}$ $z(\{1, 3, 5\}) = 19 \leq z(S^G) = 19$

$S^G \setminus\{4\} \cup \{2\} = \{2, 3, 5\}$ $z(\{2, 4, 5\}) = 16 \leq z(S^G) = 19$

$S^G \setminus\{5\} \cup \{1\} = \{1, 3, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 3)

$S^G \setminus\{5\} \cup \{2\} = \{2, 3, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 3).

Pertanto nell'insieme $N(S^G)$ non abbiamo trovato soluzioni migliori della corrente S^G. Stop.

La soluzione $S^G = \{3, 4, 5\}$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione i valori $x_j = 0, 0, 1, 1, 1$) è pertanto un ottimo locale (rispetto al suo intorno $N(S^G)$), insieme alla allocazione ottima che si ottiene allocando i clienti ai magazzini in S^G in modo da massimizzare il profitto. In particolare il cliente:

- $i = 1$ viene allocato al magazzino $j = 5$ (quindi, $y_{1j} = 0, 0, 0, 0, 1$);
- $i = 2$ viene allocato al magazzino $j = 3$ (quindi, $y_{2j} = 0, 0, 1, 0, 0$);
- $i = 3$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{3j} = 0, 0, 0, 1, 0$);
- $i = 4$ viene allocato al magazzino $j = 3$ (quindi, $y_{4j} = 0, 0, 1, 0, 0$);
- $i = 5$ viene allocato al magazzino $j = 5$ (quindi, $y_{5j} = 0, 0, 0, 0, 1$);
- $i = 6$ viene allocato al magazzino $j = 5$ (quindi, $y_{6j} = 0, 0, 0, 0, 1$);
- $i = 7$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{7j} = 0, 0, 0, 1, 0$).

4) Formulazione duale del rilassamento lineare di UFL.

Rilassiamo linearmente il problema UFL. Otteniamo il problema

RL(UFL)

$\max z = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{5} \pi_{ij}\, y_{ij} - \sum_{j=1}^{5} f_j\, x_j$

s.t.

$\sum_{j=1}^{5} y_{ij} = 1,$ per $i = 1, \ldots, 7$;

$y_{ij} \leq x_j,$ per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1, \ldots, 5$;

$x_j \leq 1,$ per $j = 1, \ldots, 5$;

$y_{ij} \geq 0,$ per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1,\ldots, 5$;

$x_j \geq 0,$ per $j = 1, \ldots, 5$.

Ne costruiamo il duale:

DRL(UFL)

$\min g = \sum_{i=1}^{7} u_i + \sum_{j=1}^{5} t_j$

s.t.

$u_i + w_{ij} \geq \pi_{ij},$ per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1, \ldots, 5$;

$-\sum_{i=1}^{7} w_{ij} + t_j \geq -f_j,$ per $j = 1, \ldots, 5$;

$w_{ij} \geq 0,$ per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1,\ldots, 5$;

$t_j \geq 0,$ per $j = 1, \ldots, 5$.

Le relazioni tra i valori delle f.o. sono
$z(\text{UFL}) \le z^*(\text{UFL}) \le z^*[\text{RL(UFL)}] = g^*[\text{DRL(UFL)}] \le g[\text{DRL(UFL)}]$.

5) Verifica bontà soluzione trovata.
Per valutare la bontà della soluzione $S = \{3, 4, 5\}$ occorre, ad esempio, valutare l'errore relativo $gap = [z^*(\text{UFL}) - z(S)]/ z^*(\text{UFL})$. Chiaramente non disponiamo di $z^*(\text{UFL})$, pertanto possiamo solo valutare per eccesso l'errore relativo sapendo che
$[z^*(\text{UFL}) - z(S)]/ z^*(\text{UFL}) = 1 - z(S)/ z^*(\text{UFL}) \le 1 - z(S)/ \text{UB} = [\text{UB} - z(S)]/\text{UB}$.
Per il momento il miglior UB a nostra disposizione è pari a 22. Cerchiamo di migliorarlo (cioè diminuirlo) con l'algoritmo di discesa duale.
L'algoritmo di discesa duale determina una buona soluzione del problema DRL(UFL)) che è il duale del rilassamento lineare RL(UFL) della formulazione (UFL).
L'algoritmo esamina soluzioni del duale per cui la f.o. $g(\cdot)$ è esprimibile solo come somma delle variabili duali u_i, cioè $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i$. Questo si verifica quando i valori $\theta_j = f_j - \sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^+$ sono non-negativi. Chiamiamo ammissibili queste soluzioni.
L'algoritmo a partire dalla soluzione ammissibile con le variabili duali $u_i = \bar{u}_i(J) = \max_{j\in J} [\pi_{ij}]$ (cioè pari al massimo di riga i della matrice dei profitti $\{\pi_{ij}\}$) si muove lungo direzioni di discesa della f.o. mantenendo l'ammissibilità per le u_i, decrementando una alla volta e ciclicamente le u_i fino al successivo massimo della riga i della matrice $\{\pi_{ij}\}$. L'algoritmo in generale si arresta quando si è tentato invano di diminuire tutte le variabili duali.
Nella tabella è riportata la traccia dell'esecuzione dell'algoritmo di discesa duale. In rosso sono riportate le iterazioni che conducono a soluzioni non ammissibili.

Iter.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$g(\mathbf{u})$
0	4	4	3	3	3	3	3	1	2	0	2	1	23
1	3	4	3	3	3	3	3	1	2	0	2	0	22
2	3	$4-\varepsilon$	3	3	3	3	3	1	2	$-\varepsilon$	2	0	-
3	3	4	2	3	3	3	3	0	2	0	1	0	21
4	3	4	2	$3-\varepsilon$	3	3	3	0	2	$-\varepsilon$	1	0	-
5	3	4	2	3	$3-\varepsilon$	3	3	0	2	0	1	$-\varepsilon$	-
6	3	4	2	3	3	$3-\varepsilon$	3	$-\varepsilon$	2	0	1	0	-
7	3	4	2	3	3	3	2	0	2	0	0	0	20
8	$3-\varepsilon$	4	2	3	3	3	2	0	2	0	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-
9	3	$4-\varepsilon$	2	3	3	3	2	0	2	$-\varepsilon$	0	0	-
10	3	4	$2-\varepsilon$	3	3	3	2	$-\varepsilon$	2	0	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-
11	3	4	2	$3-\varepsilon$	3	3	2	0	2	$-\varepsilon$	0	0	-
12	3	4	2	3	$3-\varepsilon$	3	2	0	2	0	0	$-\varepsilon$	-
13	3	4	2	3	3	$3-\varepsilon$	2	$-\varepsilon$	2	0	0	0	-
14	3	4	2	3	3	3	$2-\varepsilon$	0	2	0	$-\varepsilon$	0	-

Pertanto il miglior UB che siamo riusciti a trovare è = min{23, 20} = 20.
Siccome la miglior soluzione ammissibile per UFL che abbiamo trovato è la soluzione $S^G = \{3, 4, 5\}$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione i valori $x_j = 0, 0, 1, 1, 1$, e alle variabili di allocazione i valori determinati al punto 3 in modo da massimizzare i profitti dell'allocazione dei clienti ai magazzini in S^G) ha profitto $z(S^G) = 19$, non siamo in grado di chiudere il gap con il valore ottimo e quindi poter asserire che S^G è anche ottima. Nota bene: non possiamo neanche affermare che la soluzione non è ottima. Tuttavia l'eventuale errore relativo che stiamo commettendo rispetto al valore della soluzione ottima è non superiore a $100\ [\text{UB} - z(S^G)]/\text{UB} = 100\ [20 - 19]/20 = 5\%$.

6) Calcolo di una (possibilmente) nuova soluzione con l'approccio euristico dual-based.
Ripartiamo dalla migliore soluzione ammissibile duale ottenuta al punto 4): $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7) = (3, 4, 2, 3, 3, 3, 2)$, di valore $g(\mathbf{u}) = 20$.
L'insieme $J(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \sum_{i \in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = -\theta_j = 0\} = \{1, 3, 4, 5\}$.
Essendo $S(\mathbf{u})$ l'insieme minimale contenuto in $J(\mathbf{u})$ tale che per ogni $i \in I$ esiste un $j \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$, si ha $S(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) = \{1, 3, 4, 5\}$.
Calcoliamo $k_i(S(\mathbf{u})) = |\{ j \in S(\mathbf{u}) : \pi_{ij} > u_i\}|$, cioè $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7) = (1, 0, 2, 0, 0, 0, 1)$. Siccome $k_3 > 1$, <u>non</u> possiamo affermare che la soluzione associata a $S(\mathbf{u}) = \{1, 3, 4, 5\}$ di valore $z(S(\mathbf{u})) = 19$ è ottima.

Tuttavia se applichiamo la versione più efficace dell'algoritmo di discesa duale che non cicla semplicemente sulle u_i, ma tenta di decrementare prima la u_s per cui $|Q_s(\mathbf{u})| \leq |Q_i(\mathbf{u})|$, dove $Q_i(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \pi_{ij} - u_i \geq 0\}$, si ha (tra parentesi è riportato il valore di $|Q_i(\mathbf{u})|$ associato al valore di u_i), se è riportato (-) intendiamo che la variabile u_i non può essere ulteriormente ridotta):

Iter.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$g(\mathbf{u})$
0	4 (1)	4 (1)	3 (2)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	1	2	0	2	1	23
1	3 (2)	4 (1)	3 (2)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	1	2	0	2	0	22
2	3 (2)	$4-\varepsilon$	3 (2)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	1	2	$-\varepsilon$	2	0	-
3	3 (2)	4 (-)	3 (2)	$3-\varepsilon$	3 (1)	3 (1)	3 (1)	1	2	$-\varepsilon$	2	0	-
4	3 (2)	4 (-)	3 (2)	3 (-)	$3-\varepsilon$	3 (1)	3 (1)	1	2	0	2	$-\varepsilon$	-
5	3 (2)	4 (-)	3 (2)	3 (-)	3 (-)	2 (2)	3 (1)	0	2	0	2	0	21
6	3 (2)	4 (-)	3 (2)	3 (-)	3 (-)	2 (2)	1 (5)	0	2	0	0	0	19
7	$3-\varepsilon$	4 (-)	3 (2)	3 (-)	3 (-)	2 (2)	1 (5)	0	2	0	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-
8	3 (-)	4 (-)	$3-\varepsilon$	3 (-)	3 (-)	2 (2)	1 (5)	$-\varepsilon$	2	0	$-\varepsilon$	0	-
9	3 (-)	4 (-)	3 (-)	3 (-)	3 (-)	$2-\varepsilon$	1 (5)	$-\varepsilon$	2	0	0	0	-
10	3 (-)	4 (-)	3 (-)	3 (-)	3 (-)	2 (-)	$1-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$2-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-

Si noti che la nuova soluzione duale $[u_i^*] = (3, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$ ha valore $g(\mathbf{u}^*) = 19$ e quindi migliora la precedente $\mathbf{u}$ ottenuta al punto 5) di valore 20 pertanto il miglior UB che siamo riusciti a trovare è ora pari a 19. Siccome 19 è anche il valore delle soluzioni $S^G = \{3, 4, 5\}$ e $S(\mathbf{u}) = \{1, 3, 4, 5\}$ trovate precedentemente, possiamo concludere che sono entrambe ottime per UFL, e la $\mathbf{u}^*$ è soluzione ottima del duale del problema linearmente rilassato.

Completiamo l'analisi calcolando la soluzione primale associata alla soluzione duale $\mathbf{u}^*$ applicando l'approccio euristico dual-based.
L'insieme $J(\mathbf{u}^*) = \{ j \in J : \sum_{i \in I} (\pi_{ij} - u_i^*)^+ - f_j = -\theta_j = 0\} = \{1, 3, 4, 5\}$.
Essendo $S(\mathbf{u}^*)$ l'insieme minimale contenuto in $J(\mathbf{u}^*)$ tale che per ogni $i \in I$ esiste un $j \in S(\mathbf{u}^*)$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$, si ha $S(\mathbf{u}^*) = \{3, 4, 5\}$.
Calcoliamo $k_i(S(\mathbf{u}^*)) = |\{ j \in S(\mathbf{u}^*) : \pi_{ij} > u_i\}|$, cioè $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$.
Siccome $k_i(S(\mathbf{u}^*)) \leq 1$, per ogni $i \in I$, abbiamo ulteriore conferma dell'ottimalità della soluzione duale $\mathbf{u}^*$ e dell'ottimalità della soluzione primale associata a $S(\mathbf{u}^*) = \{3, 4, 5\}$ per UFL, di valore $z(S(\mathbf{u}^*)) = 19$.

Esercizio 3

1) Ricondurre il problema dato al problema UFL

Si considerano i seguenti insiemi $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$dei possibili siti per i magazzini e $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ di mercati (assegnando indice 1, 2, …, 7 ,rispettivamente a Atlanta, Boston, …, Philadelphia).

I costi fissi di attivazione sono dati e pari al vettore $[f_j] = [4, 4, 3, 4, 4]$.

Per quel che riguarda la matrice dei profitti $[\pi_{ij}]$ derivante dall'allocazione completa del mercato i al magazzino j, abbiamo che

$\pi_{ij} = d_i\, p_i - d_i\, q_j - t_{ij}$

dove

- d_i è la domanda annuale del mercato i;
- p_i è il prezzo unitario di vendita del bene ai clienti del mercato i;
- q_j è il costo unitario di immagazzinamento del bene nel magazzino j;
- t_{ij} è il costo di trasporto per trasportare la quantità annuale d_i di bene dal magazzino j al mercato i;

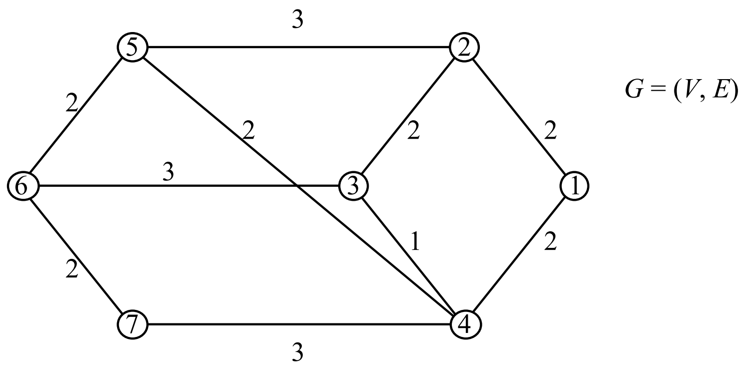
Per il calcolo di t_{ij} si ha che

- $t_{ij} = 1$ se $i = j$;
- $t_{ij} = (\delta_{ij})^2$ se $i \neq j$,

dove δ_{ij} è la distanza minima aerea per andare dalla città j alla città i (o viceversa) utilizzando le rotte aeree.

Per determinare le δ_{ij} si costruisce il grafo non orientato delle rotte $G = (V, E)$, dove $V = \{1, …, 7\}$ è l'insieme delle città e E è l'insieme delle rotte aeree. Ad ogni rotta aerea (arco non orientato di G) $e \in E$ è associata la sua lunghezza l_e riportata nella matrice assegnata delle lunghezze delle rotte aeree. In pratica tale matrice è la matrice di adiacenza dei vertici V di G, dove i valori rappresentano le lunghezze degli archi di E.

Il grafo $G = (V, E)$ è il seguente:



Calcoliamo le distanze minime δ_{ij} su G per ogni coppia $(i,\ j)$ di vertici di G. La matrice (simmetrica) $[\delta_{ij}]$ ottenuta è:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ & - & 2 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ & & - & 1 & 3 & 3 & 4 \\ & & & - & 2 & 4 & 3 \\ & & & & - & 2 & 4 \\ & & & & & - & 2 \\ & & & & & & - \end{bmatrix}$$

Pertanto la matrice (simmetrica) $[t_{ij}]$ dei costi di trasporto è:

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 4 & 16 & 36 & 25 \\ & 1 & 4 & 9 & 9 & 25 & 36 \\ & & 1 & 1 & 9 & 9 & 16 \\ & & & 1 & 4 & 16 & 9 \\ & & & & 1 & 4 & 16 \\ & & & & & 1 & 4 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

E quindi la matrice $[\pi_{ij}]$ dei profitti di allocazione $\pi_{ij} = d_i\, p_i - d_i\, q_j - t_{ij}$ è:

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 59 & 56 & 41 & 66 & 44 \\ 26 & 29 & 21 & 26 & 21 \\ 55 & 60 & 55 & 71 & 55 \\ 26 & 21 & 24 & 34 & 26 \\ 64 & 71 & 61 & 86 & 79 \\ 0 & 11 & 21 & 26 & 32 \\ 17 & 6 & 19 & 40 & 26 \end{bmatrix}$$

2) Formulazione del problema UFLP
Si considerano le variabili decisionali binarie di attivazione x_j dei magazzini j e di allocazione y_{ij} dei clienti i ai magazzini j.

(UFL)
max $z = \sum^7_{i=1}\sum^5_{j=1} \pi_{ij}\, y_{ij} - \sum^5_{j=1} f_j\, x_j$
s.t.
$\sum^5_{j=1} y_{ij} = 1$, per $i = 1, \ldots, 7$;
$y_{ij} \le x_j$, per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1, \ldots, 5$;
$y_{ij} \ge 0$, per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1, \ldots, 5$;
$x_j \in \{0,1\}$, per $j = 1, \ldots, 5$.

La f.o. da massimizzare è pari al profitto totale dovuto al soddisfacimento della domanda dei clienti in base alle allocazioni, diminuito del costo fisso totale di attivazione dei magazzini.
Il primo vincolo rappresenta il soddisfacimento della domanda di ogni cliente i espresso come allocazione totale di i ai magazzini pari al 100%.
Il secondo vincolo impone allocazioni nulle ai magazzini non attivati.

3) Complessità del problema UFLP
Il problema UFLP è NP-hard. Si dimostra infatti che il problema NP-completo del Vertex Cover si trasforma polinomialmente a UFLP.
La definizione del Vertex Cover è la seguente:
Istanza: E' dato un grafo $G = (V, E)$ (N.B.: non è quello definito nel punto 1 dell'esercizio) e un intero positivo k.
Domanda: Esiste un sottoinsieme W di V con $|W| \le k$ e tale che ogni arco e di E incide in almeno un vertice di W?

4) Soluzione greedy

L'algoritmo greedy esegue al più $n = 5$ iterazioni, in cui ad ogni iterazione si individua l'impianto (punto di vendita) più profittevole da attivare oltre a quelli attivati nelle iterazioni precedenti. L'algoritmo termina quando l'attivazione di un ulteriore impianto non comporta aumento del profitto netto, o perché non vi sono più impianti attivabili.

Durante l'applicazione dell'algoritmo greedy calcoliamo anche il valore $g(\bar{\mathbf{u}}(S_t))$ del problema duale DRL(UFL) del rilassamento lineare RL(UFL) di UFL associato alla soluzione ammissibile S_t di UFLP calcolata all'iterazione t il cui profitto è $z(S_t) = \sum_{i\in I} \max_{j\in S_t} [\pi_{ij}] - \sum_{j\in J} f_j$.

Si ricorda che in generale $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^+ - f_j]^+$ (N.B.: $[a]^+ = \max\{0, a\}$), e che scegliendo $u_i = \bar{u}_i(S) = \max_{j\in S} [\pi_{ij}]$ si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j]^+$.

Inoltre, siccome per $j \notin S$ abbiamo che $\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j = \rho_j(S) = z(S \cup \{j\}) - z(S)$, mentre per $j \in S$ è pari a zero, si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J\setminus S} [\rho_j(S)]^+$.

Inizializzazione algoritmo greedy:

$S_0 = \varnothing$, $z(S_0) = 0$

Iter. $t = 1$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_0 \cup \{j\})$:	243	250	239	**345**	279
$\rho_j(S_0)$:	243	250	239	**345**	279

$S_1 = \{4\}$, $z(S_1) = 345$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_1)) = 349 + 2 = 351$

Iter. $t = 2$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_1 \cup \{j\})$:	341	344	342	-	**347**
$\rho_j(S_1)$:	-4	-1	-3	-	**2**

$S_2 = \{4, 5\}$, $z(S_2) = 347$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_2)) = 355 + 0 = 355$

Iter. $t = 3$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_2 \cup \{j\})$:	343	346	344	-	-
$\rho_j(S_2)$:	-4	-1	-3	-	-

Nessun miglioramento. Stop. Pertanto la soluzione greedy è $S^G = S_2 = \{4, 5\}$ di profitto $z(S^G) = 347$.

Mentre il miglior UB trovato è pari a $\min_t\{g(\bar{\mathbf{u}}(S_t))\} = 351$.

La soluzione ottima sarà quindi di valore z^* compreso tra 347 e 351.

5) Algoritmo di scambio.

Siccome non possiamo essere certi che S^G sia ottima ($z(S^G) = 347 = \text{LB} < \text{UB} = 351$), proviamo a cercare una soluzione di profitto maggiore applicando l'algoritmo di scambio.

Algoritmo di scambio
Iter 1:

Cerchiamo una soluzione migliore (di profitto maggiore) di $S^{G} = \{4, 5\}$ nell'intorno $N(S^{G})$ di S^{G} definito dall'insieme delle soluzioni di UFL ottenibili da S^{G} con le seguenti operazioni di scambio:

(i) $S^{G} \cup \{j\}$;
(ii) $S^{G} \setminus \{h\}$;
(iii) $S^{G} \setminus \{h\} \cup \{j\}$.

Con operazioni di tipo (i) otteniamo soluzioni nell'insieme $N(S^{G})$ già esaminate dall'algoritmo greedy alla iter. 3 e quindi non migliori di S^{G}.
Con operazioni di tipo (ii) otteniamo soluzioni nell'insieme $N(S^{G})$ già esaminate dall'algoritmo greedy alla iter. 1 e quindi non migliori di S^{G}.
Con operazioni di tipo (iii) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S^{G})$:

$S^{G} \setminus \{4\} \cup \{1\} = \{1, 5\}$ $z(\{1, 5\}) = 295 \leq z(S^{G}) = 347$
$S^{G} \setminus \{4\} \cup \{2\} = \{2, 5\}$ $z(\{2, 5\}) = 300 \leq z(S^{G}) = 347$
$S^{G} \setminus \{4\} \cup \{3\} = \{3, 5\}$ $z(\{3, 5\}) = 276 \leq z(S^{G}) = 347$
$S^{G} \setminus \{5\} \cup \{1\} = \{1, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)
$S^{G} \setminus \{5\} \cup \{2\} = \{2, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)
$S^{G} \setminus \{5\} \cup \{3\} = \{3, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2).

Pertanto nell'insieme $N(S^{G})$ non abbiamo trovato soluzioni migliori della corrente S^{G}. Stop.

La soluzione $S^{G} = \{4, 5\}$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione i valori $x_j = 0, 0, 0, 1, 1$) è pertanto un ottimo locale (rispetto al suo intorno $N(S^{G})$), insieme alla allocazione ottima che si ottiene allocando i clienti ai magazzini in S^{G} in modo da massimizzare il profitto. In particolare il cliente:

- $i = 1$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{1j} = 0, 0, 0, 1, 0$);
- $i = 2$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{2j} = 0, 0, 0, 1, 0$);
- $i = 3$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{3j} = 0, 0, 0, 1, 0$);
- $i = 4$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{4j} = 0, 0, 0, 1, 0$);
- $i = 5$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{5j} = 0, 0, 0, 1, 0$);
- $i = 6$ viene allocato al magazzino $j = 5$ (quindi, $y_{6j} = 0, 0, 0, 0, 1$);
- $i = 7$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{7j} = 0, 0, 0, 1, 0$).

6) Verifica bontà soluzione trovata.
Per valutare la bontà della soluzione $S = \{4, 5\}$ occorre, ad esempio, valutare il rapporto $z(S)/z^{*}(\text{UFL})$. Più questo tende ad uno e migliore è la soluzione euristica S. Chiaramente non disponiamo di $z^{*}(\text{UFL})$, pertanto possiamo solo valutare per difetto il rapporto $z(S)/z^{*}(\text{UFL})$, sostituendo $z^{*}(\text{UFL})$ con UB nell denominatore, e valutando quindi il rapporto $z(S)/\text{UB}$, con il miglio UB (più piccolo) possibile.
Per il momento il miglior UB a nostra disposizione è pari a 351. Cerchiamo di migliorarlo (cioè diminuirlo) con l'algoritmo di discesa duale.
L'algoritmo di discesa duale determina una buona soluzione del problema DRL(UFL)) che è il duale del rilassamento lineare RL(UFL) della formulazione (UFL).
L'algoritmo esamina soluzioni del duale per cui la f.o. $g()$ è esprimibile solo come somma delle variabili duali u_i, cioè $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i$. Questo si verifica quando i valori $\theta_j = f_j - \sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^{+}$ sono non-negativi. Chiamiamo ammissibili queste soluzioni.
L'algoritmo a partire dalla soluzione ammissibile con le variabili duali $u_i = \bar{u}_i(J) = \max_{j\in J} [\pi_{ij}]$ (cioè pari al massimo di riga i della matrice dei profitti $\{\pi_{ij}\}$) si muove lungo direzioni di discesa della

f.o. mantenendo l'ammissibilità per le u_i, decrementando una alla volta e ciclicamente le u_i fino al successivo massimo della riga i della matrice $\{\pi_{ij}\}$. L'algoritmo in generale si arresta quando si è tentato invano di diminuire tutte le variabili duali.
Nella tabella è riportata la traccia dell'esecuzione dell'algoritmo di discesa duale. In rosso sono riportate le iterazioni che conducono a soluzioni non ammissibili.

Iter.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$g(\mathbf{u})$
0	66	29	71	34	86	32	40	4	4	3	4	4	358
1	62	29	71	34	86	32	40	4	4	3	0	4	354
2	62	26	71	34	86	32	40	4	1	3	0	4	351
3	62	26	71-ε	34	86	32	40	4	1	3	-ε	4	-
4	62	26	71	34-ε	86	32	40	4	1	3	-ε	4	-
5	62	26	71	34	86-ε	32	40	4	1	3	-ε	4	-
6	62	26	71	34	86	28	40	4	1	3	0	0	347

E' inutile proseguire perché non riusciremmo a determinare per $g(\mathbf{u})$ valori più piccoli di 347, in quanto sappiamo che per la dualità
$z(S) \le z^*(\text{UFL}) \le z^*(\text{RL(UFL)}) = g^*(\text{DRL(UFL)}) \le g(\mathbf{u})$
e abbiamo determinato $z(S^G) = 347$ e $g(\mathbf{u}) = 347$.
Questo dimostra anche che la soluzione $S^G = \{4, 5\}$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione $x^*_j = 0, 0, 0, 1, 1$, e alle variabili di allocazione i valori y^*_{ij} determinati al punto 5 in modo da massimizzare i profitti dell'allocazione dei punti di domanda ai punti di vendita in S^G è una soluzione ottima per UFLP.

7) Nonostante la soluzione $S^G = \{4, 5\}$ sia ottima, per esercizio calcoliamo anche la soluzione ottenibile con l'approccio euristico dual-based.
Ripartiamo dalla migliore soluzione ammissibile duale ottenuta al punto 6): $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7) = (62, 26, 71, 34, 86, 28, 40)$, di valore $g(\mathbf{u}) = 347$.
L'insieme $J(\mathbf{u}) = \{j \in J : \sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = -\theta_j = 0\} = \{4, 5\}$.
Essendo $S(\mathbf{u})$ l'insieme minimale contenuto in $J(\mathbf{u})$ tale che per ogni $i \in I$ esiste un $j \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij} \ge u_i$, si ha $S(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) = \{4, 5\}$.
Calcoliamo $k_i(S(\mathbf{u})) = |\{j \in S(\mathbf{u}) : \pi_{ij} > u_i\}|$, cioè $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7) = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$.
Siccome $k_i(S(\mathbf{u})) \le 1$, per ogni $i \in I$, abbiamo conferma dell'ottimalità della soluzione duale $\mathbf{u}$ e dell'ottimalità della soluzione primale associata a $S(\mathbf{u}) = \{4, 5\}$ per UFL, di valore $z(S(\text{u})) = 347$.

8) Magazzini capacitati.
La formulazione di UFLP diventa quella del problema di localizzazione impianti capacitati CFLP, con capacità magazzini $Q_j = 15$, per ogni magazzino j.

(CFL)
$\max z = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{5} \pi_{ij}\, y_{ij} - \sum_{j=1}^{5} f_j\, x_j$
s.t.
$\sum_{j=1}^{5} y_{ij} = 1,$ per $i = 1, \ldots, 7$;
$\sum_{i=1}^{7} d_i\, y_{ij} \le Q_j\, x_j,$ per $j = 1, \ldots, 5$;
$y_{ij} \ge 0,$ per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1,\ldots, 5$;
$x_j \in \{0,1\},$ per $j = 1, \ldots, 5$.

La f.o. da massimizzare è la stessa del UFLP pari al profitto totale dovuto al soddisfacimento della domanda dei clienti in base alle allocazioni, diminuito del costo fisso totale di attivazione dei magazzini. Alle volte l'obiettivo è espresso come minimizzazione dei costi totali
$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}\, y_{ij} + \sum_{j=1}^{5} f_j\, x_j$. In tal caso i costi di allocazione sono $c_{ij} = -\pi_{ij}$.

Il primo vincolo rappresenta il soddisfacimento della domanda di ogni cliente i espresso come allocazione totale di i ai magazzini pari al 100%.
Il secondo vincolo impone allocazioni nulle ai magazzini non attivati, e allocazioni totali ai magazzini attivati in modo che la domanda totale allocata non superi la capacità del magazzino j.

La soluzione $S^G = \{4, 5\}$ insieme alle allocazioni y_{ij} dei clienti ai magazzini individuata al punto 5 non è ammissibile nel caso capacitato perché la capacità del magazzino 4 è $Q_4 = 20 < \sum^7_{i=1} d_i \, y_{i4} = 45$ che sarebbe la domanda totale ad esso allocata in base ai valori assegnati alle variabili y_{i4}.
Viceversa, il vincolo di capacità del magazzino 5 è soddisfatto perché $Q_5 = 20 \geq \sum^7_{i=1} d_i \, y_{i5} = 6$ (domanda totale ad esso allocata).
Si noti che una soluzione ammissibile per CFLP non è ottenibile semplicemente riallocando la domanda dei clienti ai magazzini attivati, cioè risolvendo il problema

(ALLOC)
$\max z = \sum^7_{i=1} \sum_{j \in S^G} \pi_{ij} \, y_{ij}$
s.t.

$\sum^5_{j=1} y_{ij} = 1,$	per $i = 1, \ldots, 7;$
$\sum^7_{i=1} d_i \, y_{ij} \leq Q_j,$	per $j \in S^G = \{4, 5\};$
$y_{ij} \geq 0,$	per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j \in S^G$.

Infatti nel nostro caso il problema ALLOC non ha soluzioni ammissibili in quanto la capacità totale dei magazzini attivati $\sum_{j \in S^G} Q_j = 40$ è inferiore alla domanda totale dei clienti $\sum^7_{i=1} d_i = 51$.
E' necessario quindi cambiare del tutto la struttura della soluzione cioè l'insieme S degli impianti da attivare.

In particolare, sarà necessario attivare almeno tre impianti per coprire la domanda dei clienti. Ipotizzando di attivare gli impianti 4 e 5 (vedi risposta al quesito 7), quale terzo impianto conviene attivare? Come conviene ripartire le allocazioni delle domande dei clienti ai tre impianti attivati? Provare a fornire una soluzioni euristica S^H valutando successivamente una sottostima del rapporto $z(S^H)/z^*$.

Esercizio 4

A1) Formulazione del problema
Si considerano i seguenti insiemi $L = \{1, 2, 3\}$ degli impianti di produzione, $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$dei possibili siti per i centri di distribuzione (magazzini) e $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ di mercati.
Il costo totale (annuale) da minimizzare è dato dalla somma del:

- costo di produzione e trasporto da impianti a magazzini
- costo di movimentazione nei magazzini
- costo di trasporto da magazzini a mercati
- costo fisso di attivazione magazzini

diminuito del

- ricavo dalla vendita dei beni.

Consideriamo i parametri

- a_{lj} costo unitario di produzione e trasporto da ciascun impianto l a ciascun magazzino j
- f_j costo fisso di attivazione del magazzino j
- c_{ij} costo di allocazione domanda mercati i al magazzino j.

Il costo di allocazione c_{ij} è la somma del costi di movimentazione e del costo di trasporto meno il ricavo della vendita.
Noti i parametri

- h_j costo unitario di movimentazione merce nel magazzino j
- pi prezzo unitario di vendita presso il mercato i

e definito con

- t_{ij} il costo unitario di trasporto dal magazzino j al mercato i

si ha che $c_{ij} = d_i\,(h_j + t_{ij} - p_i)$.
Ai fini del calcolo di t_{ij}, supponendo di impiegare veicoli a pieno carico, sono dati:

- τ capacità veicoli di trasporto unitario
- γ costo per unità di distanza di un veicolo
- δ_{ij} distanza dal magazzino j al mercato i.

Pertanto $t_{ij} = 2\ \delta_{ij}\ \gamma/\tau$, dove il 2 sta a rappresentare che i veicoli effettuano sia il percorso di andata per consegnare la merce che di ritorno (a vuoto).
In definitiva: $c_{ij} = d_i\,(h_j + 2\ \delta_{ij}\ \gamma/\tau\ - p_i)$.
In tal modo il costo totale (annuale) da minimizzare è dato dalla somma del:

- costo di produzione e trasporto da impianti a magazzini
- costo di allocazione della domanda dei mercati ai magazzini
- costo fisso di attivazione magazzini

Sono altresì date:

- b_l capacità annuale di produzione impianto l;
- Q_j capacità annuale di distribuzione magazzino j.

Si considerano le variabili decisionali binarie di attivazione x_j dei magazzini j, di flusso di beni w_{lj} dall'impianto di produzione l al magazzino j e di allocazione y_{ij} dei clienti i ai magazzini j.
Il problema corrispondente ad un modello di localizzazione di tipo singolo-periodo, singolo-tipo, multi-livello, singola-commodity ha la seguente formulazione:

$\min z = \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} a_{lj}\, w_{lj} + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}\, y_{ij} + \sum_{j=1}^{5} f_j\, x_j$

s.t.

$\sum_{j=1}^{5} w_{lj} \le b_l,$ per $l = 1, \ldots, 3;$
$\sum_{l=1}^{3} w_{lj} \le Q_j\, x_j,$ per $j = 1, \ldots, 5;$
$\sum_{i=1}^{5} d_i\, y_{ij} = \sum_{l=1}^{3} w_{lj},$ per $j = 1, \ldots, 5;$
$\sum_{j=1}^{5} y_{ij} = 1,$ per $i = 1, \ldots, 5;$
$w_{lj} \ge 0,$ per $l = 1, \ldots, 3$, e per $j = 1, \ldots, 5;$
$y_{ij} \in \{0,1\},$ per $i = 1, \ldots, 5$, e per $j = 1, \ldots, 5;$
$x_j \in \{0,1\},$ per $j = 1, \ldots, 5.$

Il primo vincolo rappresenta il vincolo imposto dalla capacità limitata dell'impianti di produzione l.
Il secondo vincolo rappresenta il vincolo imposto dalla capacità limitata del magazzino j.
Il terzo vincolo rappresenta la conservazione del flusso nel centro di distribuzione j.
Il quarto vincolo rappresenta il soddisfacimento della domanda di ogni cliente i espresso come allocazione totale di i ai magazzini pari al 100%.
Le variabili di flusso w_{lj} (impianto $l \rightarrow$ magazzino j) sono non negative, mentre le variabili di allocazione y_{ij} sono vincolate ad assumere valori 0 o 1 per l'ipotesi di non frazionabilità della domanda, infine le variabili di attivazione x_j sono anch'esse binarie.

Siccome $a_{lj} = 1$, per qualunque coppia (l, j), abbiamo che la f.o. diventa
$z = \sum^{3}_{l=1}\sum^{5}_{j=1} w_{lj} + \sum^{5}_{i=1}\sum^{5}_{j=1} c_{ij}\, y_{ij} + \sum^{5}_{j=1} f_j\, x_j$.

Inoltre siccome b_l è illimitata, il primo vincolo è ridondante e può essere eliminato. In base al terzo vincolo ($\sum^{5}_{i=1} d_i\, y_{ij} = \sum^{3}_{l=1} w_{lj}$), sostituiamo l'espressione $\sum^{3}_{l=1} w_{lj}$ con $\sum^{5}_{i=1} d_i\, y_{ij}$ nella f.o. e nel secondo vincolo.

Il primo addendo $\sum^{3}_{l=1}\sum^{5}_{j=1} w_{lj}$ nella f.o. diviene
$\sum^{3}_{l=1}\sum^{5}_{j=1} w_{lj} = \sum^{5}_{j=1}\sum^{3}_{l=1} w_{lj} = \sum^{5}_{j=1} \sum^{5}_{i=1} d_i\, y_{ij} = \sum^{5}_{i=1} \sum^{5}_{j=1} d_i\, y_{ij} = \sum^{5}_{i=1} d_i \sum^{5}_{j=1} y_{ij}$,
e in base al quarto vincolo ($\sum^{5}_{j=1} y_{ij} = 1$) si ha
$\sum^{3}_{l=1}\sum^{5}_{j=1} w_{lj} = \sum^{5}_{i=1} d_i$

Pertanto aggiornando la f.o. ed eliminando il primo vincolo ridondante e il terzo vincolo usato per effettuare la sostituzione ed eliminando le variabili w_{lj} la formulazione del problema diviene

$\sum^{5}_{i=1} d_i + \min z' = \sum^{5}_{i=1}\sum^{5}_{j=1} c_{ij}\, y_{ij} + \sum^{5}_{j=1} f_j\, x_j$
s.t.
$\sum^{5}_{j=1} y_{ij} = 1,$ per $i = 1, \ldots, 5;$
$\sum^{5}_{i=1} d_i\, y_{ij} \le Q_j\, x_j,$ per $j = 1, \ldots, 5;$
$y_{ij} \in \{0,1\},$ per $i = 1, \ldots, 5$, e per $j = 1, \ldots, 5;$
$x_j \in \{0,1\},$ per $j = 1, \ldots, 5.$

A2) Formulazione del problema
Si noti che in base alle ipotesi di illimitatezza della capacità degli impianti e di unitarietà dei costi del primo livello della rete, il primo livello stesso può essere rimosso dal modello.
Il problema che rimane (a meno di una costante $cost = \sum^{5}_{i=1} d_i$) è quello di localizzazione singolo-periodo, singolo-tipo, singolo-livello e singola-commodity e corrisponde al problema di localizzazione degli impianti capacitato (CFLP) con il vincolo di single-sourcing per i punti di domanda.

B1) Modifica della formulazione del problema supponendo Q_j illimitate.
Si noti che in base alle ipotesi di illimitatezza della capacità Q_j dei magazzini j, abbiamo che $Q_j > \sum^{5}_{i=1} d_{\max}$, dove $d_{\max} = \max_i d_i$, e quindi il secondo vincolo della formulazione del CFLP si modifica in
$\sum^{5}_{i=1} d_i\, y_{ij} \le d_{\max} \sum^{5}_{i=1} y_{ij} \le \sum^{5}_{i=1} d_{\max}\, x_j < Q_j\, x_j$, da cui il vincolo
$\sum^{5}_{i=1} y_{ij} \le 5\, x_j$.

La formulazione, ponendo $\pi_{ij} = -c_{ij}$ e trascurando il termine costante, pertanto diviene

$\max z'' = \sum^5_{i=1}\sum^5_{j=1} \pi_{ij}\, y_{ij} - \sum^5_{j=1} f_j\, x_j$
s.t.
$\sum^5_{j=1} y_{ij} = 1$, per $i = 1, \ldots, 5$;
$\sum^5_{i=1} y_{ij} \leq 5\, x_j$, per $j = 1, \ldots, 5$;
$y_{ij} \in \{0,1\}$, per $i = 1, \ldots, 5$, e per $j = 1,\ldots, 5$;
$x_j \in \{0,1\}$, per $j = 1, \ldots, 5$.

Questa è la formulazione (aggregata) AUFL del problema di localizzazione degli impianti non capacitato UFLP.

B2) Complessità di UFLP.
Il problema UFLP è NP-hard. Si dimostra infatti che il problema NP-completo del Vertex Cover si trasforma polinomialmente a UFLP.
La definizione del Vertex Cover è la seguente:
Istanza: E' dato un grafo $G = (V, E)$ (N.B.: non è quello definito nel punto 1 dell'esercizio) e un intero positivo k.
Domanda: Esiste un sottoinsieme W di V con $|W| \leq k$ e tale che ogni arco e di E incide in almeno un vertice di W?

C1) Determinare π_{ij}.
In base a quanto detto al punto A) $c_{ij} = d_i\,(h_j + 2\, \delta_{ij}\, \gamma/\tau - p_i)$. Pertanto, avendo posto $\pi_{ij} = -c_{ij}$ si ha:
$\pi_{ij} = -d_i\,(h_j + 2\, \delta_{ij}\, \gamma/\tau - p_i)$.
Si determinano i seguenti valori (mancanti):
$\pi_{15} = 1000$; $\pi_{24} = 10000$; $\pi_{33} = 8000$; $\pi_{42} = 8000$; $\pi_{51} = 10000$;

La matrice dei profitti π_{ij} di allocazione del cliente i al magazzino j è quindi (in migliaia)

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 9 & 10 & 10 \\ 6 & 10 & 8 & 12 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 9 & 8 \\ 10 & 1 & 10 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Per completezza riportiamo anche il vettore dei costi fissi f_j di attivazione dei magazzini j (in migliaia)

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

C2) Soluzione greedy
L'algoritmo greedy esegue al più $n = 5$ iterazioni, in cui ad ogni iterazione si individua l'impianto (punto di vendita) più profittevole da attivare oltre a quelli attivati nelle iterazioni precedenti. L'algoritmo termina quando l'attivazione di un ulteriore impianto non comporta aumento del profitto netto, o perché non vi sono più impianti attivabili.

Durante l'applicazione dell'algoritmo greedy calcoliamo anche il valore $g(\bar{\mathbf{u}}(S_t))$ del problema duale DRL(UFL) del rilassamento lineare RL(UFL) di UFL associato alla soluzione ammissibile S_t di UFLP calcolata all'iterazione t il cui profitto è $z(S_t) = \sum_{i\in I} \max_{j\in S_t} [\pi_{ij}] - \sum_{j\in J} f_j$.
Si ricorda che in generale $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^+ - f_j]^+$, e che scegliendo $u_i = \bar{u}_i(S) = \max_{j\in S} [\pi_{ij}]$ si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j]^+$.
Inoltre, siccome per $j \notin S$ abbiamo che $\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j = \rho_j(S) = z(S \cup \{j\}) - z(S)$, mentre per $j \in S$ è pari a zero, si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J\setminus S} [\rho_j(S)]^+$.

I valori riportati sono espressi in migliaia.
Inizializzazione algoritmo greedy:

$S_0 = \emptyset$, $z(S_0) = 0$

Iter. $t = 1$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_0 \cup \{j\})$:	29	35	33	**36**	28
$\rho_j(S_0)$:	29	35	33	**36**	28

$S_1 = \{4\}$, $z(S_1) = 36$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_1)) = 40 + 15 = 55$

Iter. $t = 2$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_1 \cup \{j\})$:	**44**	40	39	-	29
$\rho_j(S_1)$:	**8**	4	3	-	-7

$S_2 = \{1, 4\}$, $z(S_2) = 44$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_2)) = 51 + 2 = 53$

Iter. $t = 3$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_2 \cup \{j\})$:	-	**46**	40	-	37
$\rho_j(S_2)$:	-	**2**	-4	-	-7

$S_3 = \{1, 2, 4\}$, $z(S_3) = 46$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_3)) = 56 + 0 = 56$

Iter. $t = 4$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_3 \cup \{j\})$:	-	-	42	-	39
$\rho_j(S_3)$:	-	-	-4	-	-7

Nessun miglioramento. Stop. Pertanto la soluzione greedy è
$S^G = S_3 = \{1, 2, 4\}$ di profitto $z(S^G) = 46$.
Mentre il miglior UB trovato è pari a $\min_t\{g(\bar{\mathbf{u}}(S_t))\} = 53$.
La soluzione ottima sarà quindi di valore z^* compreso tra 46 e 53 (in migliaia).

C3) Algoritmo di ricerca locale
Siccome non possiamo essere certi che S^G sia ottima ($z(S^G) = 46 < \text{UB} = 53$), proviamo a cercare una soluzione di profitto maggiore applicando l'algoritmo di scambio.

Algoritmo di scambio

Iter 1:

Cerchiamo una soluzione migliore (di profitto maggiore) di $S^G = \{1, 2, 4\}$ nell'intorno $N(S^G)$ di S^G definito dall'insieme delle soluzioni di UFL ottenibili da S^G con le seguenti operazioni di scambio:

(i) $S^G \cup \{j\}$;

(ii) $S^G \setminus\{h\}$;

(iii) $S^G \setminus\{h\} \cup \{j\}$.

Con operazioni di tipo (i) otteniamo soluzioni nell'insieme $N(S^G)$ già esaminate dall'algoritmo greedy alla iter. 4 e quindi non migliori di S^G.

Con operazioni di tipo (ii) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S^G)$:

$S^G \setminus\{1\} = \{2, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)

$S^G \setminus\{2\} = \{1, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)

$\mathbf{S^G \setminus\{4\} = \{1, 2\}}$ $\mathbf{z(\{1, 2\}) = 47} > z(S^G) = 46$

Con operazioni di tipo (iii) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S^G)$:

$S^G \setminus\{1\} \cup \{3\} = \{2, 3, 4\}$ $z(\{2, 3, 4\}) = 41 \leq z(S^G) = 46$

$S^G \setminus\{1\} \cup \{5\} = \{2, 4, 5\}$ $z(\{2, 4, 5\}) = 33 \leq z(S^G) = 46$

$S^G \setminus\{2\} \cup \{3\} = \{1, 3, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 3)

$S^G \setminus\{2\} \cup \{5\} = \{1, 4, 5\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 3)

$S^G \setminus\{4\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}$ $z(\{1, 2, 3\}) = 43 \leq z(S^G) = 46$

$S^G \setminus\{4\} \cup \{5\} = \{1, 2, 5\}$ $z(\{1, 2, 5\}) = 40 \leq z(S^G) = 46$.

Iter 2:

Cerchiamo una soluzione migliore (di profitto maggiore) di $S = \{1, 2\}$ di profitto $z(S) = 47$ nell'intorno $N(S)$ di S definito dall'insieme delle soluzioni di UFL ottenibili da S con le seguenti operazioni di scambio:

(i) $S \cup \{j\}$;

(ii) $S \setminus\{h\}$;

(iii) $S \setminus\{h\} \cup \{j\}$.

Con operazioni di tipo (i) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S)$:

$S \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}$ (già esaminata nell'iterazione precedente)

$S \cup \{4\} = \{1, 2, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 3)

$S \cup \{5\} = \{1, 2, 5\}$ (già esaminata nell'iterazione precedente)

Con operazioni di tipo (ii) otteniamo soluzioni nell'insieme $N(S)$ già esaminate dall'algoritmo greedy alla iter. 1 e quindi non migliori di S^G e quindi non migliori di S.

Con operazioni di tipo (iii) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S)$:

$S \setminus\{1\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$ $z(\{2, 3\}) = 42 \leq z(S) = 47$

$S \setminus\{1\} \cup \{4\} = \{2, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)

$S \setminus\{1\} \cup \{5\} = \{2, 5\}$ $z(\{2, 5\}) = 34 \leq z(S) = 47$

$S \setminus\{2\} \cup \{3\} = \{1, 3\}$ $z(\{1, 3\}) = 34 \leq z(S) = 47$

$S \setminus\{2\} \cup \{4\} = \{1, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)

$S \setminus\{2\} \cup \{5\} = \{1, 5\}$ $z(\{1, 5\}) = 37 \leq z(S) = 47$.

Pertanto nell'insieme $N(S)$ non abbiamo trovato soluzioni migliori della corrente S. Stop.

La soluzione $S = \{1, 2\}$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione i valori $x_j = 1, 1, 0, 0, 0$) è pertanto un ottimo locale (rispetto al suo intorno $N(S)$), insieme alla allocazione ottima che si ottiene allocando i mercati ai magazzini in S in modo da massimizzare il profitto. In particolare il mercato:

- $i = 1$ viene allocato al magazzino $j = 1$ (quindi, $y_{1j} = 1, 0, 0, 0, 0$);
- $i = 2$ viene allocato al magazzino $j = 2$ (quindi, $y_{2j} = 0, 1, 0, 0, 0$);
- $i = 3$ viene allocato al magazzino $j = 2$ (quindi, $y_{3j} = 0, 1, 0, 0, 0$);
- $i = 4$ viene allocato al magazzino $j = 2$ (quindi, $y_{4j} = 0, 1, 0, 0, 0$);
- $i = 5$ viene allocato al magazzino $j = 1$ (quindi, $y_{5j} = 1, 0, 0, 0, 0$).

Possiamo calcolare il valore della soluzione duale $u_i(S) = \max_{j\in S} [\pi_{ij}]$ associata ad S per vedere di migliorare possibilmente il miglior UB corrente che vale 53. Ricordiamo che $g(\mathbf{u}(S)) = \sum_{i\in I} u_i(S) + \sum_{j\in J\setminus S} [\rho_j(S)]^+ = 53 + 0 = 53$; non riusciamo a migliorare UB!
Nonostante $S = \{1, 2\}$ un ottimo locale, non possiamo asserire che sia anche ottimo globale in quanto il gap tra $z(S) = 47$ e UB = 53 è diverso da zero. La soluzione ottima sarà quindi di valore z^*(UFL) compreso tra 47 e 53 (in migliaia).

C4) Verifica bontà soluzione trovata.
Per valutare la bontà della soluzione $S = \{1, 2\}$ occorre, ad esempio, valutare l'errore relativo $gap = [z^*(\text{UFL}) - z(S)]/ z^*(\text{UFL})$. Chiaramente non disponiamo di z^*(UFL), pertanto possiamo solo valutare per eccesso l'errore relativo sapendo che
$[z^*(\text{UFL}) - z(S)]/ z^*(\text{UFL}) = 1 - z(S)/ z^*(\text{UFL}) \le 1 - z(S)/ \text{UB} = [\text{UB} - z(S)]/\text{UB}$.
Per il momento il miglior (più piccolo) UB a nostra disposizione è pari a 53. Cerchiamo di migliorarlo (cioè diminuirlo) con l'algoritmo di discesa duale.
L'algoritmo di discesa duale determina una buona soluzione del problema DRL(UFL)) che è il duale del rilassamento lineare RL(UFL) della formulazione (UFL).
L'algoritmo esamina soluzioni del duale per cui la f.o. $g()$ è esprimibile solo come somma delle variabili duali u_i, cioè $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i$. Questo si verifica quando i valori $\theta_j = f_j - \sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^+$ sono non-negativi. Chiamiamo ammissibili queste soluzioni.
L'algoritmo a partire dalla soluzione ammissibile con le variabili duali $u_i = \bar{u}_i(J) = \max_{j\in J} [\pi_{ij}]$ (cioè pari al massimo di riga i della matrice dei profitti $\{\pi_{ij}\}$) si muove lungo direzioni di discesa della f.o. mantenendo l'ammissibilità per le u_i, decrementando una alla volta e ciclicamente le u_i fino al successivo massimo della riga i della matrice $\{\pi_{ij}\}$. L'algoritmo in generale si arresta quando si è tentato invano di diminuire tutte le variabili duali.
Nella tabella è riportata la traccia dell'esecuzione dell'algoritmo di discesa duale. In rosso sono riportate le iterazioni che conducono a soluzioni non ammissibili.

Iter.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$g(\mathbf{u})$
0	10	15	12	9	10	3	3	4	4	7	56
1	7	15	12	9	10	0	3	4	4	7	53
2	7	12	12	9	10	0	0	4	4	7	50
3	7	12	10	9	10	0	0	4	2	7	48
4	7	12	10	8	10	0	0	4	1	7	47

E' inutile proseguire perché non riusciremmo a determinare per $g(\mathbf{u})$ valori più piccoli di 47, in quanto sappiamo che per la dualità
$z(S) \le z^*(\text{UFL}) \le z^*(\text{RL(UFL)}) = g^*(\text{DRL(UFL)}) \le g(\mathbf{u})$
e abbiamo determinato $z(S) = 47$ e $g(\mathbf{u}) = 47$.
Questo dimostra anche che la soluzione $S = \{1, 2\}$ di profitto $z(S) = 47000$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione $x^*_j = 1, 1, 0, 0, 0$, e alle variabili di allocazione i valori y^*_{ij} determinati al punto C3 in modo da massimizzare i profitti dell'allocazione dei mercati ai centri di distribuzione in S è una soluzione ottima per UFLP.

C5) Nonostante la soluzione $S = \{1, 2\}$ sia ottima, per esercizio calcoliamo anche la soluzione ottenibile con l'approccio euristico dual-based.
Ripartiamo dalla migliore soluzione ammissibile duale ottenuta al punto C3): $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (7, 12, 10, 8, 10)$, di valore $g(\mathbf{u}) = 47$.
L'insieme $J(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = -\theta_j = 0\} = \{1, 2\}$.
Essendo $S(\mathbf{u})$ l'insieme minimale contenuto in $J(\mathbf{u})$ tale che per ogni $i \in I$ esiste un $j \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$, si ha $S(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) = \{1, 2\}$.
Calcoliamo $k_i(S(\mathbf{u})) = |\{ j \in S(\mathbf{u}) : \pi_{ij} > u_i\}|$, cioè $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = (1, 1, 0, 0, 0)$. Siccome $k_i(S(\mathbf{u})) \leq 1$, per ogni $i \in I$, abbiamo conferma dell'ottimalità della soluzione duale $\mathbf{u}$ e dell'ottimalità della soluzione primale associata a $S(\mathbf{u}) = \{1, 2\}$ per UFL, di valore $z(S(\mathrm{u})) = 47$.

D1) Verifica ammissibilità della soluzione nel caso capacitato.
In base alla soluzione $S = \{1, 2\}$, i centri di distribuzione 1 e 2 attivati presentano una capacità totale annuale $Q_{\text{tot}} = \sum_{j\in S} Q_j = 800$ mila tonnellate che pertanto è sufficiente a rifornire i mercati che complessivamente presentano una domanda annuale $d_{\text{tot}} = \sum_{i\in I} d_i = 700$ mila tonnellate.
Dobbiamo però verificare che sia ammissibile l'allocazione dei mercati ai centri di distribuzione determinata al punto C3) secondo la quale:
- $i = 1$ viene allocato al magazzino $j = 1$ (quindi, $y_1j = 1, 0, 0, 0, 0$);
- $i = 2$ viene allocato al magazzino $j = 2$ (quindi, $y_2j = 0, 1, 0, 0, 0$);
- $i = 3$ viene allocato al magazzino $j = 2$ (quindi, $y_3j = 0, 1, 0, 0, 0$);
- $i = 4$ viene allocato al magazzino $j = 2$ (quindi, $y_4j = 0, 1, 0, 0, 0$);
- $i = 5$ viene allocato al magazzino $j = 1$ (quindi, $y_5j = 1, 0, 0, 0, 0$).

Con questa allocazione il centro di distribuzione 1 dovrà far fronte ad una domanda annuale pari a $\sum_{i\in I} d_i\, y_{i1} = 300$ mila tonnellate a fronte di una capacità $Q_1 = 400$ mila t., mentre il centro di distribuzione 2 dovrà far fronte ad una domanda annuale pari a $\sum_{i\in I} d_i\, y_{i2} = 400$ mila tonnellate a fronte di una capacità $Q_2 = 400$ mila t. Pertanto il vincolo di capacità è rispettato per entrambi i centri di distribuzione e quindi la soluzione fornita la punto C3 è ammissibile anche per il caso capacitato.
Si noti inoltre che essendo la soluzione ottima per UFLP, in base a quanto potuto verificare al punto C4, sarà ottima anche per il caso capacitato.

Esercizio 5

A1) Formulazione del problema
Si considerano i seguenti insiemi $L = \{1, 2, 3\}$ degli impianti di produzione, $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$dei possibili siti per i centri di distribuzione (magazzini) e $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ di mercati.
Il costo totale (annuale) da minimizzare è dato dalla somma del:
- costo di produzione e trasporto da impianti a magazzini
- costo di movimentazione nei magazzini
- costo di trasporto da magazzini a mercati
- costo fisso di attivazione magazzini

diminuito del
- ricavo dalla vendita dei beni.

Consideriamo i parametri
- a_{lj} costo unitario di produzione e trasporto da ciascun impianto l a ciascun magazzino j
- f_j costo fisso di attivazione del magazzino j
- c_{ij} costo di allocazione domanda mercati i al magazzino j.

Il costo di allocazione c_{ij} è la somma del costi di movimentazione e del costo di trasporto meno il ricavo della vendita.
Noti i parametri
- h_j costo unitario di movimentazione merce nel magazzino j
- pi prezzo unitario di vendita presso il mercato i

e definito con
- t_{ij} il costo unitario di trasporto dal magazzino j al mercato i

si ha che $c_{ij} = d_i\,(h_j + t_{ij} - p_i)$.
Ai fini del calcolo di t_{ij}, supponendo di impiegano veicoli a pieno carico, sono dati:
- τ capacità veicoli di trasporto unitario
- γ costo per unità di distanza di un veicolo
- δ_{ij} distanza dal magazzino j al mercato i.

Pertanto $t_{ij} = 2\ \delta_{ij}\ \gamma/\tau$, dove il 2 sta a rappresentare che i veicoli effettuano sia il percorso di andata per consegnare la merce che di ritorno (a vuoto).
In definitiva: $c_{ij} = d_i\,(h_j + 2\ \delta_{ij}\ \gamma/\tau\ - p_i)$.
In tal modo il costo totale (annuale) da minimizzare è dato dalla somma del:
- costo di produzione e trasporto da impianti a magazzini
- costo di allocazione della domanda dei mercati ai magazzini
- costo fisso di attivazione magazzini

Sono altresì date:
- b_l capacità annuale di produzione impianto l;
- Q_j capacità annuale di distribuzione magazzino j.

Si considerano le variabili decisionali binarie di attivazione x_j dei magazzini j, di flusso di beni w_{lj} dall'impianto di produzione l al magazzino j e di allocazione y_{ij} dei clienti i ai magazzini j.
Il problema corrispondente ad un modello di localizzazione di tipo singolo-periodo, singolo-tipo, multi-livello, singola-commodity ha la seguente formulazione:

$\min z = \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} a_{lj}\, w_{lj} + \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}\, y_{ij} + \sum_{j=1}^{5} f_j\, x_j$

s.t.

$\sum_{j=1}^{5} w_{lj} \le b_l$, per $l = 1, \dots, 3$;
$\sum_{l=1}^{3} w_{lj} \le Q_j\, x_j$, per $j = 1, \dots, 5$;
$\sum_{i=1}^{7} d_i\, y_{ij} = \sum_{l=1}^{3} w_{lj}$, per $j = 1, \dots, 5$;
$\sum_{j=1}^{5} y_{ij} = 1$, per $i = 1, \dots, 7$;
$w_{lj} \ge 0$, per $l = 1, \dots, 3$, e per $j = 1,\dots, 5$;
$y_{ij} \ge 0$, per $i = 1, \dots, 7$, e per $j = 1,\dots, 5$;
$x_j \in \{0,1\}$, per $j = 1, \dots, 5$.

Il primo vincolo rappresenta il vincolo imposto dalla capacità limitata dell'impianti di produzione l.
Il secondo vincolo rappresenta il vincolo imposto dalla capacità limitata del magazzino j.
Il terzo vincolo rappresenta la conservazione del flusso nel centro di distribuzione j.
Il quarto vincolo rappresenta il soddisfacimento della domanda di ogni cliente i espresso come allocazione totale di i ai magazzini pari al 100%.
Le variabili di flusso w_{lj} (impianto $l \rightarrow$ magazzino j) e le variabili di allocazione y_{ij} sono non negative, infine le variabili di attivazione x_j sono vincolate ad assumere valori 0 o 1.

B1) Modifica formulazione
Siccome $a_{lj} = K$, per qualunque coppia (l, j), abbiamo che la f.o. diventa
$z = K \sum^3_{l=1}\sum^5_{j=1} w_{lj} + \sum^7_{i=1}\sum^5_{j=1} c_{ij}\, y_{ij} + \sum^5_{j=1} f_j\, x_j$.

Inoltre siccome b_l è illimitata, il primo vincolo è ridondante e può essere eliminato. In base al terzo vincolo ($\sum^7_{i=1} d_i\, y_{ij} = \sum^3_{l=1} w_{lj}$), sostituiamo l'espressione $\sum^3_{l=1} w_{lj}$ con $\sum^7_{i=1} d_i\, y_{ij}$ nella f.o. e nel secondo vincolo.

Il primo addendo $K \sum^3_{l=1}\sum^5_{j=1} w_{lj}$ nella f.o. diviene
$K \sum^3_{l=1}\sum^5_{j=1} w_{lj} = K \sum^5_{j=1}\sum^3_{l=1} w_{lj} = K \sum^5_{j=1} \sum^7_{i=1} d_i\, y_{ij} = K \sum^7_{i=1} \sum^5_{j=1} d_i\, y_{ij} = K \sum^7_{i=1} d_i \sum^5_{j=1} y_{ij}$,
e in base al quarto vincolo ($\sum^5_{j=1} y_{ij} = 1$) si ha
$K \sum^3_{l=1}\sum^5_{j=1} w_{lj} = K \sum^7_{i=1} d_i$

Pertanto aggiornando la f.o. ed eliminando il primo vincolo ridondante e il terzo vincolo usato per effettuare la sostituzione ed eliminare le variabili w_{lj} la formulazione del problema diviene

$K \sum^7_{i=1} d_i + \min z' = \sum^7_{i=1}\sum^5_{j=1} c_{ij}\, y_{ij} + \sum^5_{j=1} f_j\, x_j$
s.t.
$\sum^5_{j=1} y_{ij} = 1$, per $i = 1, \ldots, 5$;
$\sum^7_{i=1} d_i\, y_{ij} \le Q_j\, x_j$, per $j = 1, \ldots, 5$;
$y_{ij} \ge 0$, per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1, \ldots, 5$;
$x_j \in \{0,1\}$, per $j = 1, \ldots, 5$.

Si noti che in base alle ipotesi di illimitatezza della capacità degli impianti e di uguali costi unitari del primo livello della rete, il primo livello stesso può essere rimosso dal modello
Il problema che rimane (a meno di una costante $cost = K \sum^7_{i=1} d_i$) è quello di localizzazione singolo-periodo, singolo-tipo, singolo-livello e singola-commodity e corrisponde al problema di localizzazione degli impianti capacitato (CFLP).

C1) Modifica della formulazione del problema supponendo $Q_j \ge \sum^7_{i=1} d_i$.
Senza perdita di generalità possiamo supporre le domande tutte uguali pari a $\underline{d}$ e allora $Q_j \ge 7\,\underline{d}$.
Si noti che in base a questa ipotesi il secondo vincolo della formulazione del CFLP si modifica in
$\sum^7_{i=1} \underline{d}\, y_{ij} \le 7\, \underline{d}\, x_j \le Q_j\, x_j$. Da cui il vincolo
$\sum^7_{i=1} y_{ij} \le 7\, x_j$.

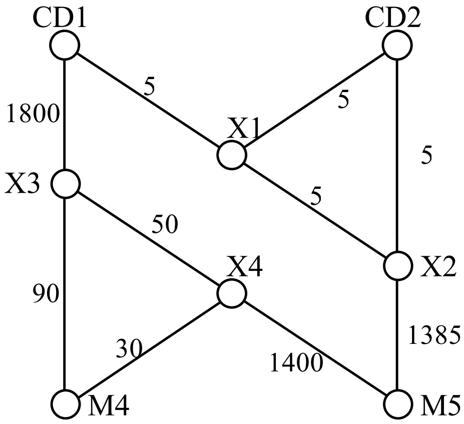
La formulazione data in B1), ponendo π_{ij} = -c_{ij} e trascurando il termine costante, pertanto diviene

max $z'' = \sum^{7}_{i=1}\sum^{5}_{j=1} \pi_{ij}\, y_{ij} - \sum^{5}_{j=1} f_j\, x_j$
s.t.
$\sum^{5}_{j=1} y_{ij} = 1$, per $i = 1, \ldots, 7$;
$\sum^{7}_{i=1} y_{ij} \le 7\, x_j$, per $j = 1, \ldots, 5$;
$y_{ij} \ge 0$, per $i = 1, \ldots, 7$, e per $j = 1, \ldots, 5$;
$x_j \in \{0,1\}$, per $j = 1, \ldots, 5$.

Questa è la formulazione (aggregata) AUFL del problema di localizzazione degli impianti non capacitato UFLP.

C2) Complessità di UFLP.
Il problema UFLP è NP-hard. Si dimostra infatti che il problema NP-completo del Vertex Cover si trasforma polinomialmente a UFLP.
La definizione del Vertex Cover è la seguente:
Istanza: E' dato un grafo $G = (V, E)$ (N.B.: non è quello definito nel punto 1 dell'esercizio) e un intero positivo k.
Domanda: Esiste un sottoinsieme W di V con $|W| \le k$ e tale che ogni arco e di E incide in almeno un vertice di W?

D1) Determinare π_{ij}.
Occorre determinare preliminarmente la matrice [δ_{ij}] delle distanze minime base alla rete stradale rappresentata dal grafo non-orientato $G = (V, E)$ (differente da quello a cui si fa riferimento al punto C2) costruito a partire dalla data matrice di adiacenza pesata con le lunghezze degli archi stradali.



$G = (V, E)$

Si determinano i seguenti valori (mancanti) di [δ_{ij}]:
$\delta_{M4,C1} = \delta_{41} = 1880$; $\delta_{M4,C2} = \delta_{42} = 1890$; $\delta_{M5,C1} = \delta_{51} = 1395$; $\delta_{M5,C2} = \delta_{52} = 1390$.

In base a quanto detto al punto A) $c_{ij} = d_i\,(h_j + 2\,\delta_{ij}\,\gamma/\tau - p_i)$. Pertanto, avendo posto $\pi_{ij} = -c_{ij}$ si ha:
$\pi_{ij} = -d_i\,(h_j + 2\,\delta_{ij}\,\gamma/\tau - p_i)$.
Si determinano i seguenti valori (mancanti) di [π_{ij}]:
$\pi_{14} = 3000$; $\pi_{25} = 1000$; $\pi_{41} = 2000$; $\pi_{52} = 2000$; $\pi_{63} = 1000$; $\pi_{74} = 3000$;

La matrice dei profitti π_{ij} di allocazione del cliente i al magazzino j è quindi (in migliaia)

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Per completezza riportiamo anche il vettore dei costi fissi f_j di attivazione dei magazzini j (in migliaia)

$$[f_j] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

D2) Soluzione greedy
L'algoritmo greedy esegue al più $n = 5$ iterazioni, in cui ad ogni iterazione si individua l'impianto (punto di vendita) più profittevole da attivare oltre a quelli attivati nelle iterazioni precedenti. L'algoritmo termina quando l'attivazione di un ulteriore impianto non comporta aumento del profitto netto, o perché non vi sono più impianti attivabili.
Durante l'applicazione dell'algoritmo greedy calcoliamo anche il valore $g(\bar{\mathbf{u}}(S_t))$ del problema duale DRL(UFL) del rilassamento lineare RL(UFL) di UFL associato alla soluzione ammissibile S_t di UFLP calcolata all'iterazione t il cui profitto è $z(S_t) = \sum_{i\in I} \max_{j\in S_t} [\pi_{ij}] - \sum_{j\in J} f_j$.
Si ricorda che in generale $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^+ - f_j]^+$, e che scegliendo $u_i = \bar{u}_i(S) = \max_{j\in S} [\pi_{ij}]$ si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J} [\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j]^+$.
Inoltre, siccome per $j \notin S$ abbiamo che $\sum_{i\in I} [\pi_{ij} - \bar{u}_i(S)]^+ - f_j = \rho_j(S) = z(S \cup \{j\}) - z(S)$, mentre per $j \in S$ è pari a zero, si ha $g(\bar{\mathbf{u}}(S)) = \sum_{i\in I} \bar{u}_i(S) + \sum_{j\in J\setminus S} [\rho_j(S)]^+$.

I valori riportati sono espressi in migliaia.
Inizializzazione algoritmo greedy:

$S_0 = \varnothing$, $\quad z(S_0) = 0$

Iter. $t = 1$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_0 \cup \{j\})$:	14	7	13	**15**	14
$\rho_j(S_0)$:	14	7	13	**15**	14

$S_1 = \{4\}$, $\quad z(S_1) = 15$, $\quad g(\bar{\mathbf{u}}(S_1)) = 17 + 5 = 22$

Iter. $t = 2$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_1 \cup \{j\})$:	16	13	**17**	-	17
$\rho_j(S_1)$:	1	-2	**2**	-	2

$S_2 = \{3, 4\}$, $\quad z(S_2) = 17$, $\quad g(\bar{\mathbf{u}}(S_2)) = 19 + 3 = 22$

Iter. $t = 3$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_2 \cup \{j\})$:	18	15	-	-	**19**
$\rho_j(S_2)$:	1	-2	-	-	**2**

$S_3 = \{3, 4, 5\}$, $z(S_3) = 19$, $g(\bar{\mathbf{u}}(S_3)) = 22 + 0 = 22$

Iter. $t = 4$

j:	1	2	3	4	5
$z(S_3 \cup \{j\})$:	19	17	-	-	-
$\rho_j(S_3)$:	0	-2	-	-	-

Nessun miglioramento. Stop. Pertanto la soluzione greedy è
$S^G = S_3 = \{3, 4, 5\}$ di profitto $z(S^G) = 19$.
Mentre il miglior UB trovato è pari a $\min_t\{g(\bar{\mathbf{u}}(S_t))\} = 22$.
La soluzione ottima sarà quindi di valore z^* compreso tra 19 e 22 (in migliaia).

D3) Algoritmo di ricerca locale
Siccome non possiamo essere certi che S^G sia ottima ($z(S^G) = 19 < UB = 22$), proviamo a cercare una soluzione di profitto maggiore applicando l'algoritmo di scambio.

Algoritmo di scambio
Iter 1:

Cerchiamo una soluzione migliore (di profitto maggiore) di $S^G = \{3, 4, 5\}$ nell'intorno $N(S^G)$ di S^G definito dall'insieme delle soluzioni di UFL ottenibili da S^G con le seguenti operazioni di scambio:

(i) $S^G \cup \{j\}$;
(ii) $S^G \setminus \{h\}$;
(iii) $S^G \setminus \{h\} \cup \{j\}$.

Con operazioni di tipo (i) otteniamo soluzioni nell'insieme $N(S^G)$ già esaminate dall'algoritmo greedy alla iter. 4 e quindi non migliori di S^G.
Con operazioni di tipo (ii) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S^G)$:
$S^G \setminus \{3\} = \{4, 5\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)
$S^G \setminus \{4\} = \{3, 5\}$ $z(\{3, 5\}) = 18 \le z(S^G) = 19$
$S^G \setminus \{5\} = \{3, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 2)
Con operazioni di tipo (iii) otteniamo le seguenti nell'insieme $N(S^G)$:
$S^G \setminus \{3\} \cup \{1\} = \{1, 4, 5\}$ $z(\{1, 4, 5\}) = 17 \le z(S^G) = 19$
$S^G \setminus \{3\} \cup \{2\} = \{2, 4, 5\}$ $z(\{2, 4, 5\}) = 15 \le z(S^G) = 19$
$S^G \setminus \{4\} \cup \{1\} = \{1, 3, 5\}$ $z(\{1, 3, 5\}) = 19 \le z(S^G) = 19$
$S^G \setminus \{4\} \cup \{2\} = \{2, 3, 5\}$ $z(\{2, 3, 5\}) = 16 \le z(S^G) = 19$
$S^G \setminus \{5\} \cup \{1\} = \{1, 3, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 3)
$S^G \setminus \{5\} \cup \{2\} = \{2, 3, 4\}$ (già esaminata dall'algoritmo greedy alla iter. 3).

Pertanto nell'insieme $N(S^G)$ non abbiamo trovato soluzioni migliori della corrente S^G. Stop.

La soluzione $S^G = \{3, 4, 5\}$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione i valori $x_j = 0, 0, 1, 1, 1$) è pertanto un ottimo locale (rispetto al suo intorno $N(S^G)$), insieme alla allocazione ottima che si ottiene allocando i clienti ai magazzini in S^G in modo da massimizzare il profitto. Cioè, il cliente:
- $i = 1$ viene allocato al magazzino $j = 5$ (quindi, $y_{1j} = 0, 0, 0, 0, 1$);

- $i = 2$ viene allocato al magazzino $j = 3$ (quindi, $y_{2j} = 0, 0, 1, 0, 0$);
- $i = 3$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{3j} = 0, 0, 0, 1, 0$);
- $i = 4$ viene allocato al magazzino $j = 3$ (quindi, $y_{4j} = 0, 0, 1, 0, 0$);
- $i = 5$ viene allocato al magazzino $j = 5$ (quindi, $y_{5j} = 0, 0, 0, 0, 1$);
- $i = 6$ viene allocato al magazzino $j = 5$ (quindi, $y_{6j} = 0, 0, 0, 0, 1$);
- $i = 7$ viene allocato al magazzino $j = 4$ (quindi, $y_{7j} = 0, 0, 0, 1, 0$).

D5) Algoritmo di discesa duale
Per valutare la bontà della soluzione $S = \{3, 4, 5\}$ occorre, ad esempio, valutare l'errore relativo $gap = [z^*(\text{UFL}) - z(S)]/ z^*(\text{UFL})$. Chiaramente non disponiamo di $z^*(\text{UFL})$, pertanto possiamo solo valutare per eccesso l'errore relativo sapendo che
$[z^*(\text{UFL}) - z(S)]/ z^*(\text{UFL}) = 1 - z(S)/ z^*(\text{UFL}) \leq 1 - z(S)/ \text{UB} = [\text{UB} - z(S)]/\text{UB}$.
Per il momento il miglior UB a nostra disposizione è pari a 22. Cerchiamo di migliorarlo (cioè diminuirlo) con l'algoritmo di discesa duale.
L'algoritmo di discesa duale determina una buona soluzione del problema DRL(UFL)) che è il duale del rilassamento lineare RL(UFL) della formulazione (UFL).
L'algoritmo esamina soluzioni del duale per cui la f.o. $g()$ è esprimibile solo come somma delle variabili duali u_i, cioè $g(\mathbf{u}) = \sum_{i\in I} u_i$. Questo si verifica quando i valori $\theta_j = f_j - \sum_{i\in I} [\pi_{ij} - u_i]^+$ sono non-negativi. Chiamiamo ammissibili queste soluzioni.
L'algoritmo a partire dalla soluzione ammissibile con le variabili duali $u_i = \bar{u}_i(J) = \max_{j\in J} [\pi_{ij}]$ (cioè pari al massimo di riga i della matrice dei profitti $\{\pi_{ij}\}$) si muove lungo direzioni di discesa della f.o. mantenendo l'ammissibilità per le u_i, decrementando una alla volta e ciclicamente le u_i fino al successivo massimo della riga i della matrice $\{\pi_{ij}\}$. L'algoritmo in generale si arresta quando si è tentato invano di diminuire tutte le variabili duali.
Nella tabella è riportata la traccia dell'esecuzione dell'algoritmo di discesa duale. In rosso sono riportate le iterazioni che conducono a soluzioni non ammissibili.

Iter.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$g(\mathbf{u})$
0	4	4	3	3	3	3	3	1	2	0	2	1	23
1	3	4	3	3	3	3	3	1	2	0	2	0	22
2	3	$4-\varepsilon$	3	3	3	3	3	1	2	$-\varepsilon$	2	0	-
3	3	4	2	3	3	3	3	0	2	0	1	0	21
4	3	4	2	$3-\varepsilon$	3	3	3	0	2	$-\varepsilon$	1	0	-
5	3	4	2	3	$3-\varepsilon$	3	3	0	2	0	1	$-\varepsilon$	-
6	3	4	2	3	3	$3-\varepsilon$	3	$-\varepsilon$	2	0	1	0	-
7	3	4	2	3	3	3	2	0	2	0	0	0	20
8	$3-\varepsilon$	4	2	3	3	3	2	0	2	0	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-
9	3	$4-\varepsilon$	2	3	3	3	2	0	2	$-\varepsilon$	0	0	-
10	3	4	$2-\varepsilon$	3	3	3	2	$-\varepsilon$	2	0	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-
11	3	4	2	$3-\varepsilon$	3	3	2	0	2	$-\varepsilon$	0	0	-
12	3	4	2	3	$3-\varepsilon$	3	2	0	2	0	0	$-\varepsilon$	-
13	3	4	2	3	3	$3-\varepsilon$	2	$-\varepsilon$	2	0	0	0	-
14	3	4	2	3	3	3	$2-\varepsilon$	0	2	0	$-\varepsilon$	0	-

Pertanto il miglior UB che siamo riusciti a trovare è $= \min\{23, 20\} = 20$ (in migliaia).
Siccome la miglior soluzione ammissibile per UFL che abbiamo trovato è la soluzione $S^G = \{3, 4, 5\}$ (ottenuta assegnando alle variabili di attivazione i valori $x_j = 0, 0, 1, 1, 1$, e alle variabili di allocazione i valori determinati al punto D3 in modo da massimizzare i profitti dell'allocazione dei clienti ai magazzini in S^G) ha profitto $z(S^G) = 19$ (in migliaia), non siamo in grado di chiudere il gap con il valore ottimo e quindi poter asserire che S^G è anche ottima. Tuttavia l'errore relativo che stiamo commettendo è non superiore a $100\,[\text{UB} - z(S^G)]/\text{UB} = 100\,[20 - 19]/20 = 5\%$.

D6) Calcolo di una (possibilmente) nuova soluzione con l'approccio euristico dual-based.
Ripartiamo dalla migliore soluzione ammissibile duale ottenuta al punto D5): $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7) = (3, 4, 2, 3, 3, 3, 2)$, di valore $g(\mathbf{u}) = 20$.
L'insieme $J(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i)^+ - f_j = -\theta_j = 0\} = \{1, 3, 4, 5\}$.
Essendo $S(\mathbf{u})$ l'insieme minimale contenuto in $J(\mathbf{u})$ tale che per ogni $i \in I$ esiste un $j \in S(\mathbf{u})$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$, si ha $S(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) = \{1, 3, 4, 5\}$.
Calcoliamo $k_i(S(\mathbf{u})) = |\{ j \in S(\mathbf{u}) : \pi_{ij} > u_i\}|$, cioè $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7) = (1, 0, 2, 0, 0, 0, 1)$. Siccome $k_3 > 1$, <u>non</u> possiamo affermare che la soluzione associata a $S(\mathbf{u}) = \{1, 3, 4, 5\}$ di valore $z(S(\mathbf{u})) = 19$ è ottima.

Tuttavia se applichiamo la versione più efficace dell'algoritmo di discesa duale che non cicla semplicemente sulle u_i, ma tenta di decrementare prima la u_s per cui $|Q_s(\mathbf{u})| \leq |Q_i(\mathbf{u})|$, dove $Q_i(\mathbf{u}) = \{ j \in J : \pi_{ij} - u_i \geq 0\}$, si ha (tra parentesi è riportato il valore di $|Q_i(\mathbf{u})|$ associato al valore di u_i), se è riportato (-) intendiamo che la variabile u_i non può essere ulteriormente ridotta):

Iter.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$g(\mathbf{u})$
0	4 (1)	4 (1)	3 (2)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	1	2	0	2	1	23
1	3 (2)	4 (1)	3 (2)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	1	2	0	2	0	22
2	3 (2)	$4-\varepsilon$	3 (2)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	3 (1)	1	2	$-\varepsilon$	2	0	-
3	3 (2)	4 (-)	3 (2)	$3-\varepsilon$	3 (1)	3 (1)	3 (1)	1	2	$-\varepsilon$	2	0	-
4	3 (2)	4 (-)	3 (2)	3 (-)	$3-\varepsilon$	3 (1)	3 (1)	1	2	0	2	$-\varepsilon$	-
5	3 (2)	4 (-)	3 (2)	3 (-)	3 (-)	2 (2)	3 (1)	0	2	0	2	0	21
6	3 (2)	4 (-)	3 (2)	3 (-)	3 (-)	2 (2)	1 (5)	0	2	0	0	0	19
7	$3-\varepsilon$	4 (-)	3 (2)	3 (-)	3 (-)	2 (2)	1 (5)	0	2	0	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-
8	3 (-)	4 (-)	$3-\varepsilon$	3 (-)	3 (-)	2 (2)	1 (5)	$-\varepsilon$	2	0	$-\varepsilon$	0	-
9	3 (-)	4 (-)	3 (-)	3 (-)	3 (-)	$2-\varepsilon$	1 (5)	$-\varepsilon$	2	0	0	0	-
10	3 (-)	4 (-)	3 (-)	3 (-)	3 (-)	2 (-)	$1-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$2-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-

Si noti che la nuova soluzione duale $[u_i^*] = (3, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$ ha valore $g(\mathbf{u}^*) = 19$ e quindi migliora la precedente $\mathbf{u}$ ottenuta al punto 5) di valore 20 pertanto il miglior UB che siamo riusciti a trovare è ora pari a 19. Siccome 19 è anche il valore delle soluzioni $S^G = \{3, 4, 5\}$ e $S(\mathbf{u}) = \{1, 3, 4, 5\}$ trovate precedentemente, possiamo concludere che sono entrambe ottime per UFL, e la $\mathbf{u}^*$ è soluzione ottima del duale del problema linearmente rilassato.

Completiamo l'analisi calcolando la soluzione primale associata alla soluzione duale $\mathbf{u}^*$ applicando l'approccio euristico dual-based.
L'insieme $J(\mathbf{u}^*) = \{ j \in J : \sum_{i\in I} (\pi_{ij} - u_i^*)^+ - f_j = -\theta_j = 0\} = \{1, 3, 4, 5\}$.
Essendo $S(\mathbf{u}^*)$ l'insieme minimale contenuto in $J(\mathbf{u}^*)$ tale che per ogni $i \in I$ esiste un $j \in S(\mathbf{u}^*)$ per cui $\pi_{ij} \geq u_i$, si ha $S(\mathbf{u}^*) = \{3, 4, 5\}$.
Calcoliamo $k_i(S(\mathbf{u}^*)) = |\{ j \in S(\mathbf{u}^*) : \pi_{ij} > u_i\}|$, cioè $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$.
Siccome $k_i(S(\mathbf{u}^*)) \leq 1$, per ogni $i \in I$, abbiamo ulteriore conferma dell'ottimalità della soluzione duale $\mathbf{u}^*$ e dell'ottimalità della soluzione primale associata a $S(\mathbf{u}^*) = \{3, 4, 5\}$ per UFL, di valore $z(S(\mathbf{u}^*)) = 19$.