Project Scheduling: PERT

1. Introduzione

- Il *PERT* è una tecnica introdotta per la *pianificazione* ed il *controllo* di *progetti* in cui le *durate* t_{ij} delle singole *attività* sono delle variabili *aleatorie*.

- Il *PERT* ha potenzialità superiori rispetto a quelle di un semplice mezzo per la pianificazione ed il controllo.

- Il *PERT* può essere impiegato anche per fornire al project manager un'*indicazione* del *rischio* in termini di *ritardo* del progetto.

- Un obiettivo del *PERT* è quello di *stimare* la *probabilità* con cui i *tempi* di un certo *progetto* possono essere *rispettati*.

Project Scheduling: PERT

1. Introduzione (continua)

- Nel seguito facciamo riferimento alla rete di progetto $R = (N, A)$ del tipo AOA.

- Supponiamo di aver programmato i tempi d'inizio di tutte le attività e sia τ_i il tempo d'inizio delle attività che hanno origine nel nodo i.

- La *probabilità* che le *attività* che *originano dal nodo i possano* effettivamente *iniziare all'istante* τ_i è uguale alla *probabilità*

$$\text{Prob}\{t_i \leq \tau_i\}$$

  che il *tempo minimo di raggiungimento* t_i del nodo i *non superi* τ_i.

- Per *determinare* le probabilità $\text{Prob}\{t_i \leq \tau_i\}$, sapendo che $t_i = \max_{(h,\ i)\in A}\{t_h + t_{hi}\}$, si può partire dalla conoscenza delle *densità* di *probabilità* di t_{hi} e dalla definizione di t_h per ricavare la densità di probabilità di t_i.

- Questa *procedura* risulta ovviamente *proibitiva* nelle applicazioni concrete per cui *si ricorre alla tecnica del PERT*.

Project Scheduling: PERT

2. Ipotesi preliminari

- Sia K_i il numero delle catene congiungenti il nodo 0 con il nodo i.

- Siano $t_i^{(1)}, t_i^{(2)}, \ldots, t_i^{(K_i)}$ i tempi associati a tali catene.

- Pertanto $t_i^{(j)}$ è pari alla somma dei tempi di esecuzione delle attività presenti sulla j-ma catena congiungente il nodo 0 con il nodo i.

- Quindi: $t_i = t_i^{(k)} = \max_{1 \le j \le K_i}\{t_i^{(j)}\}$

- Il *PERT* si basa su *due ipotesi semplificative*:

  <u>*Ipotesi 1*</u>

  - *Il tempo massimo si verifica su quella catena per cui è massimo il valore atteso del tempo associato,* il che consente di stimare *il valore atteso del tempo massimo come il massimo dei valori attesi dei tempi associati alle catene*, ossia:

$$t_i^{(k)} = \max_{1 \le j \le K_i}\{t_i^{(j)}\} \quad \xrightarrow{PERT} \quad E[t_i^{(k)}] \cong \max_{1 \le j \le K_i}\{E[t_i^{(j)}]\}$$

Project Scheduling: PERT

2. Ipotesi preliminari (continua)

- L'*ipotesi 1*, pur non potendo essere avvalorata teoricamente, comporta *notevoli semplificazioni* di calcolo, giacché consente di estendere ai valori attesi di t_i l'espressione valida nel caso deterministico.

- Infatti, ponendo $\bar{t}_{ij} = \mathrm{E}[t_{ij}]$ e $\bar{t}_i = \mathrm{E}[t_i]$ si ha per l'ipotesi 1:

$$\bar{t}_i = \max_{(h,\, i) \in A} \{\bar{t}_h + \bar{t}_{hi}\}$$

con $\bar{t}_0 = 0$ per convenzione.

- La *conseguenza* è che i tempi $\bar{t}_i$ sono la *somma* delle *durate attese* delle *attività* del *percorso* di *durata attesa massima*, individuato con l'applicazione della precedente espressione.

Ipotesi 2

- *Il tempo minimo di raggiungimento del nodo i è una variabile aleatoria normale*.

- L'*ipotesi 2* trova la sua giustificazione nel ben noto *teorema del limite centrale*.

  - *Teorema del limite centrale*
    La densità di probabilità della *somma* di n *variabili aleatorie indipendenti*, sotto ipotesi generali, *tende* ad una *distribuzione normale* per $n \to \infty$.

Project Scheduling: PERT

3. Valori atteso e varianza tempi di raggiungimento

- Affinchè le distribuzioni di probabilità delle variabili aleatorie t_i siano completamente determinate è dunque sufficiente calcolare il *valore atteso* e la *varianza* di t_i.

- In base alle ipotesi su cui si basa l'analisi *PERT* segue che:

- Il *valore atteso* $\bar{t}_i$ della variabile casuale t_i si ricava dalla precedente formula:

$$\bar{t}_i = \max_{(h,\, i) \in A} \{\bar{t}_h + \bar{t}_{hi}\}$$

- *Supponendo* che le *durate* delle attività siano statisticamente *indipendenti* tra di loro si ha che:

- La *varianza* $\sigma^2_{t_i}$ della variabile casuale t_i è la *somma* delle *varianze* delle *durate* t_{pq} delle attività $(p,\ q)$ del percorso individuato attraverso l'applicazione della espressione per il calcolo di $\bar{t}_i$.

Project Scheduling: PERT

3. Valori atteso e varianza tempi di raggiungimento (continua)

- Tuttavia, è più comodo calcolare la varianza $\sigma^2_{t_i}$ di t_i mediante la seguente formula ricorsiva:

$$\sigma^2_{t_i} = \sigma^2_{t_\ell} + \sigma^2_{t_{\ell i}}; \qquad \sigma^2_{t_0} = 0$$

  dove ℓ è il valore di h per cui si ha $\max_{(h,\ i)\in A}\{\bar{t_h} + \bar{t}_{hi}\}$ e $\sigma^2_{t_{\ell i}}$ è la varianza di $t_{\ell i}$.
  Nel caso in cui $\max\{\ldots\}$ si verifica per più di un valore di h, è opportuno scegliere quello per cui la varianza è maggiore.

- L'uso delle due precedenti espressioni presuppone la *conoscenza* del *valore atteso* $\bar{t}_{ij}$ e della *varianza* $\sigma^2_{t_{ij}}$ delle *durate* t_{ij} delle *attività*.

- Il *PERT*, sulla base di ulteriori ipotesi sulla funzione densità di probabilità delle durate t_{ij}, *fornisce* un *metodo* per la *stima* di *questi parametri*.

Project Scheduling: PERT

4. Stime della durata di un'attività

- Si suppone di disporre di *tre stime* della *durata* per una generica *attività*:

  a_{ij}: stima *ottimistica*

  m_{ij}: stima *più probabile*

  b_{ij}: stima *pessimistica*

Durata ottimistica

- *Stima* del *più breve tempo possibile* richiesto per l'esecuzione dell'*attività*.
- È la durata che l'attività richiederebbe "qualora tutto andasse per il verso giusto".
- La probabilità che l'attività richieda un tempo inferiore a questa durata è pari a 0,01.

Project Scheduling: PERT

4. Stime della durata di un'attività (continua)

Durata più probabile

- *Stima* del *tempo più probabile* richiesto per l'esecuzione dell'*attività*.
- È la *durata più probabile* dell'*attività*.
- È il valore della durata che si verificherebbe più frequentemente se l'attività fosse ripetuta più volte e sempre nelle stesse condizioni.

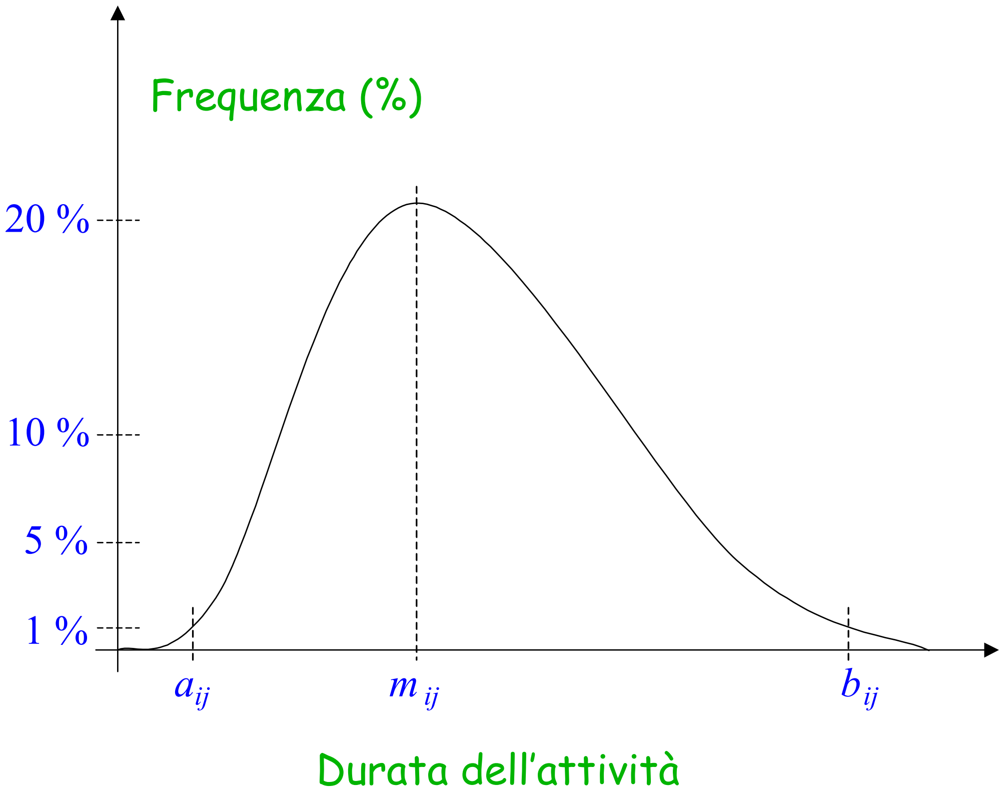
Durata pessimistica

- *Stima* del *più lungo tempo possibile* richiesto per l'esecuzione dell'*attività*.
- È la *durata più lunga* che l'attività richiederebbe "qualora tutto andasse storto".
- La probabilità che l'attività richieda un tempo superiore a questa durata è pari a 0,01.

Project Scheduling: PERT

5. Valore atteso e varianza durata di un'attività

- Si suppone che la distribuzione di probabilità della durata t_{ij} sia la *distribuzione beta*.



- In base alle ipotesi sul tipo di distribuzione di probabilità delle durate si ha:

- Il *valore atteso* $\bar{t}_{ij}$ della durata t_{ij} di un'attività (i, j) è (approssimamente) pari a:

$$\bar{t}_{ij} = (a_{ij} + 4\, m_{ij} + b_{ij})/6$$

- La *varianza* $\sigma^2_{t_{ij}}$ della durata t_{ij} di un'attività (i, j) è (approssimamente) pari a:

$$\sigma^2_{t_{ij}} = (b_{ij} - a_{ij})^2/36$$

Project Scheduling: PERT

6. Calcolo probabilità sulla tempistica del progetto

- Il *tempo minimo di raggiungimento* t_i del nodo i è invece una *variabile aleatoria normale* (vedi Ipotesi 2).

  Pertanto:

- Per calcolare $\text{Prob}\{t_i \leq \tau_i\}$ si può ricorrere alle tabelle che danno per punti la funzione di distribuzione delle variabili aleatorie normali, una volta noti il valore medio $\bar{t}_i$ e la varianza $\sigma^2_{t_i}$ di t_i.

- Di solito tali tabelle sono relative e variabili aleatorie normali standardizzate e cioè con un valore atteso nullo e varianza unitaria.

- Pertanto per ogni valore τ_i occorrerà riferirsi sulla tabella al valore normalizzato z_i dato da

$$z_i = (\tau_i - \bar{t}_i)/\sigma_{t_i}$$

Project Scheduling: PERT

6. Calcolo probabilità sulla tempistica del progetto (continua)

- Poichè la programmazione riguarda anche i tempi di completamento delle singole attività e non solo quelli di inizio, allora, con le ipotesi fatte, anche il *tempo minimo di completamento* EF_{ij} *della attività* (i, j) è una *variabile aleatoria normale*.

- Il suo *valore atteso* è $\overline{EF}_{ij} = \bar{t}_i + \bar{t}_{ij}$.

- La sua *varianza* è $\sigma^2_{EF_{ij}} = \sigma^2_{t_i} + \sigma^2_{t_{ij}}$.

- Pertanto, se τ_{ij} è il tempo di completamento programmato dell'attività (i, j) allora la $\mathrm{Prob}\{EF_{ij} \leq \tau_{ij}\}$ si trova con le stesse tabelle di cui sopra.

- La *conseguenza* è che il *PERT consente* anche il *controllo* dello stato di *avanzamento lavori*.

- Questo è *importante* perchè può essere necessario *verificare se* l'*esecuzione* delle *attività* già *concluse* in uno stadio intermedio del progetto *è avvenuta in tempi tali da permettere il rispetto delle date fissate per gli eventi successivi*.

Project Scheduling: PERT

6. Calcolo probabilità sulla tempistica del progetto (continua)

- Per il calcolo *del tempo massimo di raggiungimento* T_i del nodo i e quindi dei *tempi di slittamento* e del *percorso critico*, facendo ipotesi analoghe alle precedenti, si ricavano relazioni sui valori attesi *analoghe* alle *espressioni* trovate in generale.

- Concludendo, il *PERT consente* di *calcolare*:

  1) Il *valore atteso* di t_i e T_i;
  2) La *varianza* associata a t_i e T_i;
  3) Il *valore atteso* e la *varianza* di EF_{ij};
  4) Il *valore atteso del tempo di slittamento* $(T_j - EF_{ij})$ di un'attività (i, j) e la sua *varianza*;
  5) Le *probabilità* $\text{Prob}\{t_i \leq \tau_i\}$;
  6) le grandezze di cui sopra per le attività da completare in uno stadio intermedio del progetto, sulla base dei tempi impiegati nell'esecuzione delle attività concluse in precedenza.

Project Scheduling: PERT

7. Esempio

Un progetto richiede l'esecuzione di 11 *attività*, le cui *durate* sono *aleatorie*. Le *durate stimate* delle attività (in settimane) sono riportate nella seguente tabella:

Attività	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Durata ottimistica a_{ij}	7	4	6	3	4	6	10	4	4	3	7
Durata più probabile m_{ij}	8	6	9	4	7	9	14	5	6	9	10
Durata pessimistica b_{ij}	10	9	10	8	10	15	18	8	8	15	14

Le *relazioni di precedenza* tra le attività sono le seguenti:

Attività	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Attività precedenti	-	A	-	-	A C	D	D	B E F	B E F	G I	H

La *durata prefissata* per l'intero *progetto* è di 31 *settimane*.

Project Scheduling: PERT

7. Esempio *(continua)*

Determinare, mediante l'applicazione del *PERT*:

1. Il valore atteso dei tempi minimi e massimi di raggiungimento di ogni nodo, e le varianze dei tempi minimi (e di quelli massimi);

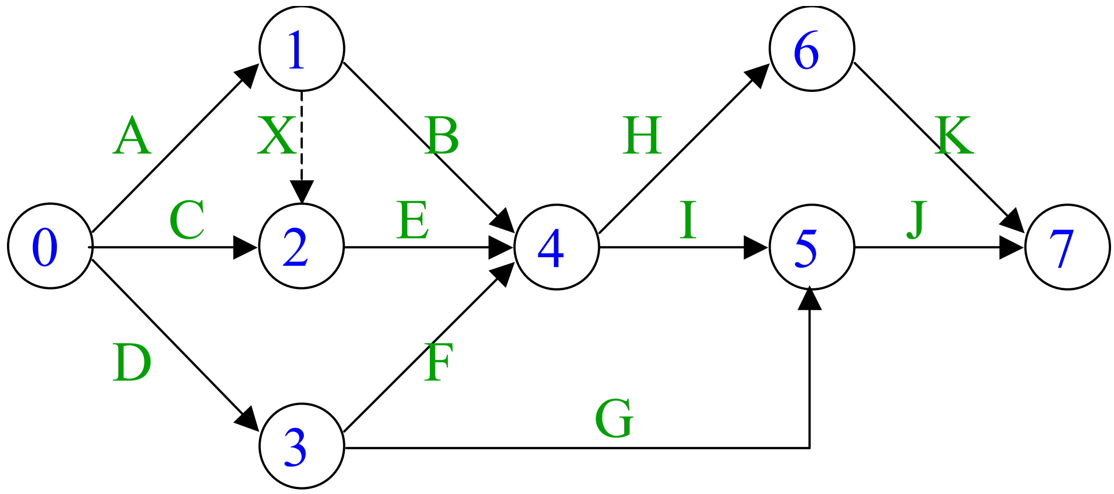
2. La probabilità che il progetto termini entro la data stabilita;

3. Il valore atteso dei tempi minimi e massimi di completamento di ogni attività, e le varianze dei tempi minimi (e di quelli massimi);

4. Le probabilità che ogni attività sia completata entro un tempo tale da non ritardare il termine dei lavori oltre la stima a priori del valore atteso del tempo massimo di completamento.

7. Esempio (continua)

Il diagramma reticolare del progetto è il seguente:



Applicando le formule

$$\bar{t}_{ij} = (a_{ij} + 4\, m_{ij} + b_{ij})/6$$

$$\sigma^2_{t_{ij}} = (b_{ij} - a_{ij})^2/36$$

si ottengono i seguenti valori:

Att. (i, j)	A (0, 1)	B (1, 4)	C (0, 2)	D (0, 3)	E (2, 4)	F (3, 4)	G (3, 5)	H (4, 6)	I (4, 5)	J (5, 7)	K (6, 7)	X (1, 2)
$\bar{t}_{ij}$	8,17	6,17	8,67	4,50	7,00	9,50	14,00	5,33	6,00	9,00	10,17	0,00
$\sigma^2_{t_{ij}}$	0,25	0,69	0,44	0,69	1,00	2,25	1,78	0,44	0,44	4,00	1,36	0,00

Project Scheduling: PERT

7. Esempio (continua)

1. Valori attesi $\bar{t}_i$ e varianza $\sigma^2_{t_i}$ dei tempi minimi di raggiungimento t_i, e valori attesi $\bar{T}_i$ dei tempi massimi di raggiungimento T_i:

Nodo	0	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{t}_i$	0,00	8,17	8,67	4,50	15,67	21,67	21,00	31,17
$\sigma^2_{t_i}$	0,00	0,25	0,44	0,69	1,44	1,89	1,89	3,25
$\bar{T}_i$	0,00	8,67	8,67	6,17	15,67	22,17	21,00	31,17

2. La probabilità che il progetto termini entro la data stabilita di 31 settimane è

$$\text{Prob}\{t_7 \leq 31\} = \text{Prob}\{z \leq (31 - \bar{t}_7)/\sigma_{t_7}\} =$$
$$= \text{Prob}\{z \leq (31 - 31{,}17)/\text{sqrt}(3{,}25)\} = \text{Prob}\{z \leq -0{,}092\} = 0{,}464$$

Project Scheduling: PERT

7. Esempio (continua)

3. Valori attesi $\overline{EF}_{ij}$ e varianza $\sigma^2{}_{EF_{ij}}$ dei tempi minimi di completamento EF_{ij}; valori attesi $\overline{TF}_{ij}$ degli slittamenti totali $TF_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij}$ delle attività ($LF_{ij} = T_j$);

4. Probabilità di completare le attività entro il valore atteso del tempo massimo di completamento $\text{Prob}\{EF_{ij} \leq \overline{LF}_{ij} = \overline{T}_j\}$.

Attività (i, j)	$\overline{EF}_{ij}$	$\sigma^2{}_{EF_{ij}}$	$\overline{T}_j$	$\overline{TF}_{ij}$	$\text{Prob}\{EF_{ij} \leq \overline{T}_j\}$
A (0, 1)	8,17	0,25	8,67	0,50	0,841
B (1, 4)	14,33	0,94	15,67	1,33	0,914
C (0, 2)	8,67	0,69	8,67	0,00	0,500
D (0, 3)	4,50	0,69	6,17	1,67	0,977
E (2, 4)	15,67	1,44	15,67	0,00	0,500
F (3, 4)	14,00	2,94	15,67	1,67	0,834
G (3, 5)	18,50	2,47	22,17	3,67	0,990
H (4, 6)	21,00	1,89	21,00	0,00	0,500
I (4, 5)	21,67	1,89	22,17	0,50	0,641
J (5, 7)	30,67	5,89	31,17	0,50	0,582
K (6 7)	31,17	3,25	31,17	0,00	0,500
X (1, 2)	8,17	0,25	8,67	0,50	0,841

7. Esempio *(continua)*

Si noti che il *cammino critico atteso*, stimato dal *PERT* in base ai valori attesi delle durate delle attività, è (0, 2, 4, 6, 7), composto dalle attività C, E, H, K (che il *PERT* stima quindi come critiche), di durata attesa pari a $\bar{t}_7 = 31{,}17$ e varianza uguale a $\sigma^2_{t_7} = 3{,}25$.

Volendo valutare la probabilità di terminare il progetto entro 35 settimane in base al *PERT* si ha che

$$\text{Prob}\{t_7 \le 35\} = \text{Prob}\{z \le (35 - \bar{t}_7)/\sigma_{t_7}\} =$$

$$\text{Prob}\{z \le (35 - 31{,}17)/\text{sqrt}(3{,}25)\} = \text{Prob}\{z \le 2{,}124\} = 0{,}983$$

La prob. che il progetto duri oltre 35 settimane è 1,7%.

Il *PERT* *ignora* gli aspetti stocastici sulle attività che non sono sul cammino critico atteso.

Consideriamo il cammino non critico (0, 2, 4, 5, 7), composto dalle attività C, E, I, J, di durata attesa pari a $\bar{t}_{02} + \bar{t}_{24} + \bar{t}_{45} + \bar{t}_{57} = 30{,}67$ e varianza uguale a $\sigma^2_{t02} + \sigma^2_{t24} + \sigma^2_{t45} + \sigma^2_{t57} = 5{,}88$.

Calcolando la precedente probabilità analizzando solo questo cammino otteniamo

$$\text{Prob}\{t_7 \le 35\} = \text{Prob}\{z \le (35 - 30{,}67)/\text{sqrt}(5{,}88)\} =$$

$$= \text{Prob}\{z \le 1{,}785\} = 0{,}963$$

La prob., valutata non sul cammino critico atteso, che il progetto duri oltre 35 settimane è invece pari a 3,7% !

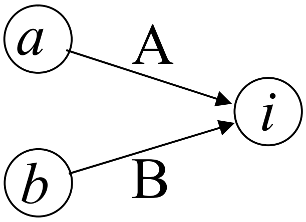
8. Il problema dell'errore sistematico assorbito dall'evento

L'esempio mostra che:

- Le approssimazioni introdotte dal *PERT* portano ad una *sottostima* della durata attesa del progetto.
- Particolarmente evidente (si stima intorno al 30%) quando la rete è piuttosto complessa.
- La sottostima è dovuto all'*errore* introdotto dal *PERT* nella *stima* del *valore atteso* $E[y]$ del massimo y tra un insieme di variabili aleatorie $x_1, \ldots, x_n$.
- Infatti il *PERT*, *per semplicità* ma *erroneamente*, *assume* (vedi ipotesi 1) che:

$$y = \max(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow{PERT} E[y] \cong \max(E[x_1], \ldots, E[x_n])$$

8. Il problema dell'errore sistematico assorbito dall'evento (continua)



$t_i = \max(t_a + t_{ai};\, t_b + t_{bi})$

$E[t_i] = E[\max(t_a + t_{ai};\, t_b + t_{bi})]$

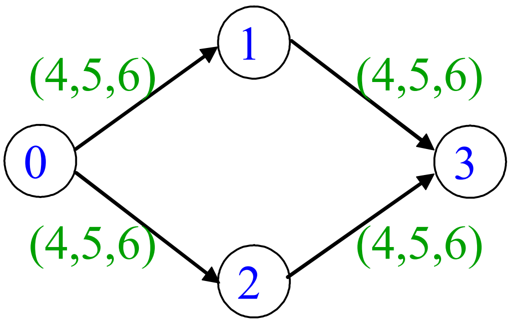
- Approssimazione *PERT*

$$E[t_i] \cong \max(E[t_a + t_{ai}];\, E[t_b + t_{bi}])$$

- Ma

$$E[\max(t_a + t_{ai};\, t_b + t_{bi})] \geq \max(E[t_a + t_{ai}];\, E[t_b + t_{bi}])$$

<u>Esempio</u>



(a_{ij}, m_{ij}, b_{ij})

$\boxed{t_3 = \max\,([t_{01} + t_{13}];\, [t_{02} + t_{23}])}$

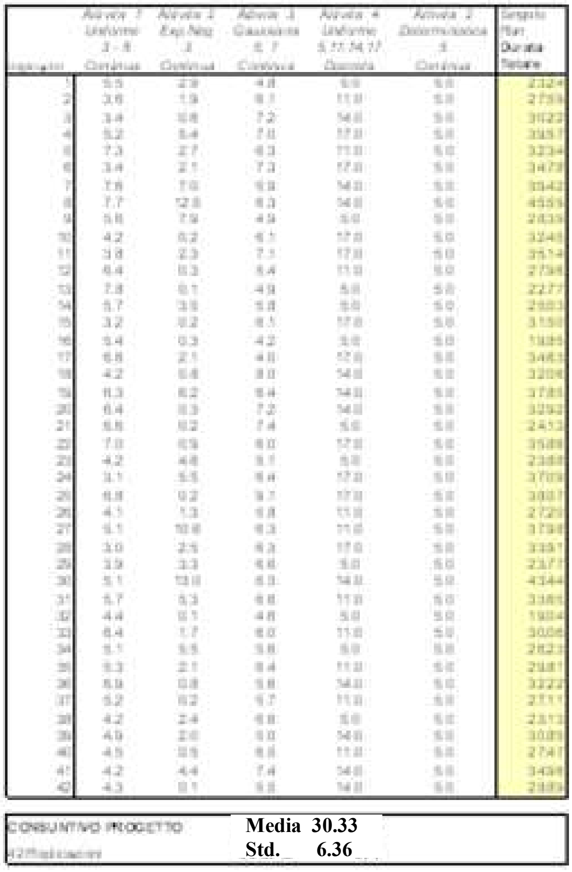
PERT → $E[t_3] = \max\,(E[t_{01} + t_{13}];\, E[t_{02} + t_{23}]) = \max\,(10;\, 10) = 10$, pertanto $\text{Prob}\{t_3 \leq 10\} = 0{,}5$

Invece, $\text{Prob}\{t_3 \leq 10\} = \text{Prob}\{t_{01}+t_{13} \leq 10\} \cdot \text{Prob}\{t_{02}+t_{23} \leq 10\} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

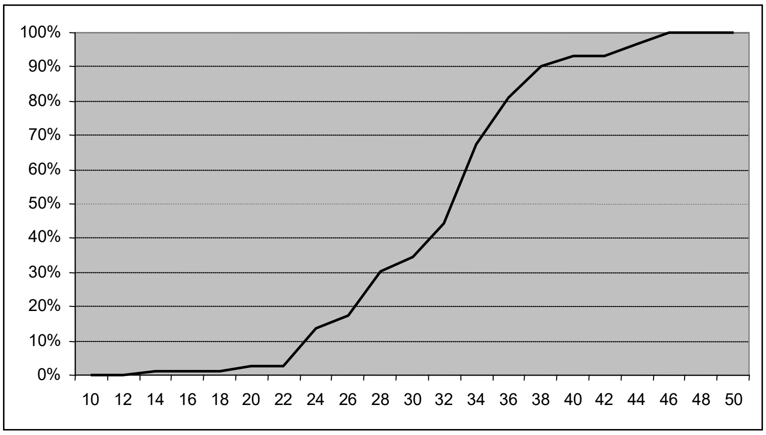
8. Il problema dell'errore sistematico assorbito dall'evento (continua)

- *PERT-state*, *PERT-path* sono tecniche più complesse che non presentano tale errore.

- Per progetti molto complessi si può far ricorso anche alla *Simulazione Montecarlo*



- Il metodo Montecarlo è un semplice tipo di simulazione stocastica applicato comunemente nel PM.
- A partire dalle distribuzioni di prob. associate alle durate delle attività, si effettuano n simulazioni.
- Al termine si effettua una valutazione complessiva degli n run (media, std, max, min, stima della distribuzione cumulata di probabilità, ...).



Project Scheduling: PERT

9. Appendice: richiami di statistica

- Il termine *statistica* è generalmente inteso come:

  - media delle caratteristiche di una popolazione
  - rappresentazione statistica di un ampio insieme di dati

- La *statistica descrittiva* è la metodologia che riduce un ampio insieme di dati in alcune statistiche riassuntive

- La *statistica inferenziale* consiste nella metodologia con cui ricavare caratteristiche di una *popolazione* basandosi sull'esame di un *campione*

- Una *popolazione* è un insieme completo di persone, oggetti, o misure di caratteristiche comuni

- Un *campione* consiste in un sottoinsieme rappresentativo di una popolazione

Project Scheduling: PERT

9. Appendice: richiami di statistica (continua)

- *Probabilità $P(x_i)$ di un evento x_i* è la frequenza (relativa) con cui si verifica un evento x_i, quando una certa situazione si ripete molte (infinite) volte in circostanze identiche

- A partire da un *campione* di n eventi la probabilità dell'evento x_i è $P(x_i) \cong f_i/n$ dove f_i è la frequenza di x_i (cioè, il numero di volte in cui si è verificato l'evento)

Misure di tendenza

- *Media* $\mu = \bar{x}$ o *valore atteso* $E(x)$ di una variabile casuale x.

$$\mu = \bar{x} = E(x) = \Sigma_i \, x_i \, P(x_i)$$

- *Moda* è il valore che si verifica con maggiore frequenza (probabilità).

Misure di dispersione

- *Varianza* σ^2 di una variabile casuale.

$$\sigma^2 = \Sigma_i \, (x_i - \bar{x})^2 \, P(x_i)$$

Project Scheduling: PERT

9. Appendice: richiami di statistica (continua)

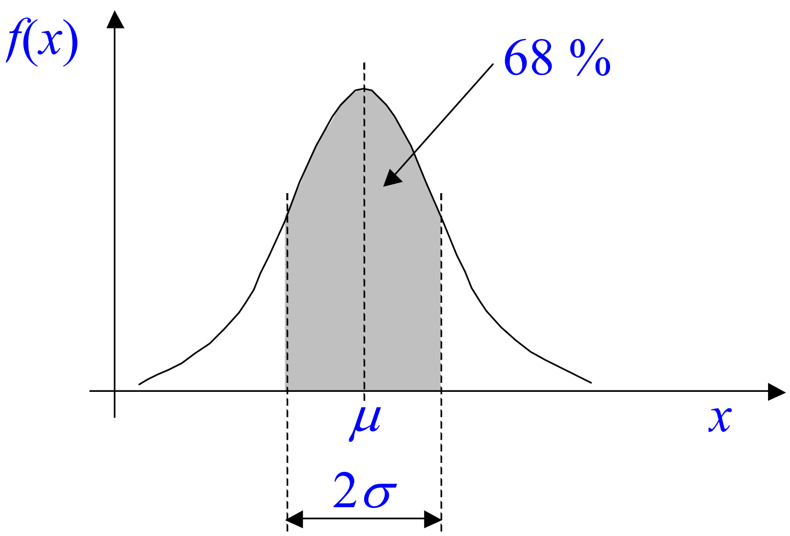
Distribuzioni di probabilità

- Una *distribuzioni di probabilità* è una funzione $f(x)$ che indica per ogni valore di una variabile casuale la sua probabilità.

- Le *distribuzioni* possono essere *discrete* o *continue* a seconda se è discreto o continuo l'insieme dei valori che può assumere una variabile casuale. In quest'ultimo caso si parla di *funzioni di densità di probabilità*.

- Distribuzione *normale*.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



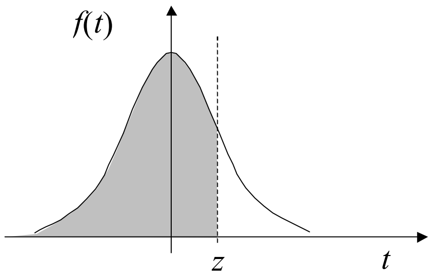
Project Scheduling: PERT

9. Appendice: richiami di statistica (continua)

- Distribuzione *normale standard*.
  - È la normale in cui $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.
  - È possibile valutare qualsiasi normale a partire dalla distribuzione normale standard con la seguente trasformazione:

$$z = (x - \mu)/\sigma$$

  - L'area sottesa dalla curva di distribuzione normale standard da -∞ a z, che fornisce la $\text{Prob}\{t \leq z\}$, è data dalla seguente tabella



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0 ….	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1 ….	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2 ….	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3 ….	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4 ….	0.6554	0,6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5 ….	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7124
0.6 ….	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7 ….	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8 ….	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9 ….	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0 ….	0.8413	0.8438	0.7461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1 ….	0.8643	0.8665	0,8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2 ….	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3 ….	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4 ….	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319