Appendice A

Appunti di Matematica Discreta

Regola della somma

- Supponiamo di avere due insiemi A e B disgiunti, ovvero a intersezione nulla, (per esempio, studenti e studentesse di una stessa classe) e di dover scegliere un unico elemento dei due insiemi (per esempio, il rappresentante di classe). Questo può esser fatto in $|A| + |B|$ modi possibili.
- Possiamo generalizzare questa idea nella *Regola della somma*: se un certo processo richiede lo svolgimento alternativo di un primo o di un secondo compito, in cui il primo può essere svolto in n_1 modi diversi e il secondo in n_2 modi diversi, ci sono $n_1 + n_2$ modi distinti di svolgere il processo.
- Questa regola può generalizzarsi in questo modo: se un processo richiede di svolgere esattamente *uno* tra p compiti alternativi, ognuno dei quali può essere svolto in n_i modi diversi, con $i = 1, \ldots, p$, ci sono $\sum_{i=1}^{p} n_i$ modi di svolgere il processo.

Regola della prodotto

- Supponiamo di avere due insiemi A e B disgiunti (per esempio, studenti e studentesse di una stessa classe) e di dover scegliere un elemento da ciascuno dei due insiemi (per esempio, una rappresentante di classe tra le studentesse e un rappresentante di classe tra gli studenti). Questo può esser fatto in $|A| \cdot |B|$ modi possibili.
- Possiamo generalizzare questa idea nella *Regola del prodotto*: se un certo processo richiede lo svolgimento di due compiti, il primo che può essere svolto in n_1 modi diversi e il secondo che può essere svolto in n_2 modi diversi, ci sono $n_1 \cdot n_2$ modi di svolgere il processo.
- Questa regola può generalizzarsi in questo modo: se un processo richiede di svolgere una *sequenza* di p compiti, ognuno dei quali può essere svolto in n_i modi diversi, con $i = 1, \ldots, p$, ci sono $\prod_{i=1}^{p} n_i$ modi di svolgere il processo.
- Esempi:
  - Quante sono le diverse stringhe di 9 bit? R.: 2^9.
    Infatti per la regola del prodotto abbiamo che il numero delle diverse stringhe è pari a $\prod_{i=1}^{9} 2 = 2^9$.
  - Supponiamo di voler assegnare un'etichetta diversa a ciascun pacco di un insieme molto numeroso di pacchi. Ogni etichetta è composta da tre lettere (supponiamo di non distinguere maiuscole da minuscole) seguite da tre cifre; le lettere sono dell'alfabeto a 21 lettere, mentre ciascuna cifra è un intero compreso tra 0 e 9. Quante sono le diverse etichette?
    R.: $21^3 \cdot 10^3$.
  - Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme S? R.: $2^{|S|}$.
    Infatti, si osservi che il numero di sottoinsiemi coincide con il numero $2^{|S|}$ delle diverse stringhe con $|S|$ bit dove lo 0/1 in i-esima posizione rappresenta il fatto di considerare o meno l'i-esimo elemento dell'insieme S.

- Una password deve essere composta da almeno 6 e al massimo 7 caratteri alfanumerici. Ogni carattere alfanumerico può essere una lettera dell'alfabeto a 21 lettere (senza distinguere tra maiuscole e minuscole), oppure un intero compreso tra 0 e 9. In ogni caso la prima lettera della password deve essere un numero. Quante sono le diverse password? R.: $10 \cdot (31^5 + 31^6)$.
  Infatti, sia p il numero di possibili password e siano p_6 e p_7 rispettivamente il numero delle password con 6 e 7 caratteri. Dalla regola della somma: $p = p_6 + p_7$. Determiniamo p_6: il primo carattere deve essere un numero, e quindi lo possiamo scegliere in 10 modi diversi. Ciascuno dei 5 caratteri successivi lo possiamo scegliere (di nuovo dalla regola della somma) in 31 modi diversi. Dalla regola del prodotto segue che $p_6 = 10 \cdot \prod_{i=1}^{5} 31 = 10 \cdot 31^5$. Analogamente, $p_7 = 10 \cdot \prod_{i=1}^{6} 31 = 10 \cdot 31^6$. Quindi, $p = 10 \cdot (31^5 + 31^6)$.

<u>Principio di inclusione/esclusione</u>

- Supponiamo di voler scegliere in una classe un rappresentante degli studenti che sia di sesso femminile oppure di nazionalità non italiana (n.b.: va anche bene che sia di sesso femminile e di nazionalità non italiana). Quante sono le possibili scelte se nella classe ci sono n_1 studenti di sesso femminile e n_2 studenti (femmine o maschi) di nazionalità non italiana? Osserviamo che in generale non possiamo applicare la regola della somma perché in questo caso l'intersezione due insiemi potrebbe essere non vuota! In effetti anche in questo caso vogliamo contare la cardinalità dell'unione dei due insiemi, ma poiché in generale i due insiemi *non* sono disgiunti (la loro intersezione è non vuota), allora questa è uguale alla somma delle cardinalità dei due insiemi meno la cardinalità dell'intersezione (ovvero il numero di studentesse di nazionalità non italiana nella classe). Questa tecnica di conteggio va sotto il nome di principio di inclusione/esclusione.
- Esempi:
  - Facendo riferimento al suddetto esempio, quanti sono i diversi modi di scegliere il rappresentante di classe di sesso femminile o di nazionalità non italiana, sapendo che la classe è formata da 30 alunni di cui 8 di nazionalità non italiana, 10 di sesso femminile di cui 7 di nazionalità italiana?
    R.: $8 + 10 - 3$.
  - Quante sono le stringhe di 8 bit in cui il terzo bit è uno 0 e/o l'ottavo un 1?
    R.: $2^7 + 2^7 - 2^6$.

<u>Pigeonhole principle (o principio dei cassetti)</u>

- *Principio base*: se n oggetti devono essere collocati in $k = n - 1$ scatole, almeno due oggetti termineranno in una stessa scatola.

  Dim.: Supponiamo al contrario che c'è al più 1 oggetto in ogni scatola. Il numero complessivo di oggetti nelle k scatole deve essere non superiore a k, ma ciò è non è possibile perché per ipotesi $n = k + 1$. □
- Esempio: in un gruppo di 13 persone, ce ne sono almeno 2 nate in uno stesso mese.
- *Generalizzazione del principio*: Se n oggetti devono essere collocati in k scatole, almeno una scatola conterrà almeno $\lceil n/k \rceil$ oggetti.

  Dim.: Supponiamo per assurdo di poter allocare gli n oggetti in k scatole, mettendo in ogni scatola al più $\lceil n/k \rceil - 1$ oggetti: quindi $n \leq k(\lceil n/k \rceil - 1)$. Ma poiché $\lceil n/k \rceil < n/k + 1$, risulterebbe $n \leq k(\lceil n/k \rceil - 1) < k(n/k + 1 - 1) = n$, cioè una contraddizione. □

- Esempi:
  - In un gruppo di 150 persone, ce ne sono almeno 13 nate in uno stesso mese.
  - Qual è il minimo numero di carte che occorre selezionare da un mazzo di 52 carte francesi per garantire che ne siano selezionate almeno tre dello stesso seme? R.: 9. Infatti $\lceil n/4 \rceil = 3 \rightarrow n/4 > 2$, cioè $n \geq 9$.
  - Quante invece ne dobbiamo almeno selezionare per garantire che siano selezionati almeno tre cuori? R.: $13 \cdot 3 + 3 = 42$.

Disposizioni, Permutazioni e Combinazioni

Disposizioni

- Supponiamo di voler contare quante diverse opportunità abbiamo di disporre (in modo ordinato) k oggetti selezionati tra n tipologie di oggetti. Distinguiamo il caso in cui possiamo selezionare al più un oggetto per ciascuna tipologia dal caso più generale in cui ciascuna tipologia può essere ripetuta (al più k volte) nella selezione.
- Dato un insieme X, con $n = |X|$, una *disposizione* di k elementi presi dall'insieme X è una sequenza (lista ordinata) di k elementi di X, cioè un elemento del prodotto cartesiano $X \times \cdots \times X$, con X ripetuto k volte. Tale elemento è anche detto "k-disposizione di n elementi".
- Una *disposizione* è *semplice* se i k elementi che la compongono sono distinti (cioè a due a due diversi); è ovvio che occorre che sia $k \leq n$.
- In generale una disposizione di k elementi può presentare uno stesso elemento ripetuto più volte (al più k volte): in tal caso la *disposizione* è *con ripetizione*. Si noti che in tal caso k può anche essere maggiore di n.
- Indichiamo con $D(n, k)$ il numero delle disposizioni semplici di k elementi presi da un insieme di n (ovvero delle "disposizioni semplici, di classe k, di n elementi"). Risulta che, $D(n, k) = n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1) = n!/(n-k)!$.

  Dim.: E' sufficiente osservare che il primo elemento può essere scelto in n modi diversi, il secondo elemento in $(n-1)$ modi diversi, ecc., fino all'elemento k-esimo che può essere scelto in $n-(k-1)$ modi diversi. L'affermazione segue poi dalla applicazione della regola del prodotto. $\square$
- Si noti che se $k = n$, abbiamo che $D(n, n) = n!$ (assumendo che $0! = 1$), mentre se $k = 0$, allora $D(n, 0) = 1$, per ogni $n \geq 0$.
- Indichiamo con $D'(n, k)$ il numero delle disposizioni con ripetizione di k elementi presi da un insieme di n (ovvero delle "disposizioni con ripetizione, di classe k, di n elementi"). Risulta che, $D'(n, k) = n^k$.

  Dim.: E' sufficiente osservare che il primo elemento può essere scelto in n modi diversi, il secondo elemento in altrettanto n modi diversi (visto che si possono ripetere gli elementi), ecc., fino all'elemento k-esimo che può essere scelto analogamente in n modi diversi. L'affermazione segue poi dalla applicazione della regola del prodotto. $\square$
- Esempi:
  - Siano u e v due vertici di K_n, il grafo completo di n vertici. Quanti sono i possibili cammini da u a v con $k+1$ spigoli, con $k \leq n-2$? R.: $D(n-2, k)$.

Infatti, consideriamo un cammino da u a v con $k + 1$ spigoli, e.g., $P = (u, v_1, v_2, \ldots, v_k, v)$; si può associare a questo cammino la k-disposizione $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Viceversa, ricordando che il grafo è completo, possiamo associare a una qualunque k-disposizione $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ dei vertici di $V(K_n)\setminus\{u, v\}$ un cammino in K_n da u a v con $k + 1$ spigoli, cioè $(u, u_1, u_2, \ldots, u_k, v)$. Concludiamo quindi che in K_n il numero di cammini da u a v con $k + 1$ spigoli è proprio $D(n - 2, k)$.

  - Quanti sono i possibili diversi podi (ricordiamo che sul podio salgono i primi tre classificati: il primo sul gradino più alto, ecc.) di una gara con 8 atleti? R.: 336.
  - Quanti numeri di 4 cifre si possono comporre con la tastiera del telefono? E quanti nel caso in cui si utilizzino solo i tasti 1, 2 e 3? R.: 10000; 81.

Permutazioni

- Supponiamo di voler contare quanti sono i diversi modi di ordinare n oggetti di k distinte tipologie. Dobbiamo distinguere due casi: il numero k delle tipologie coincide con il numero n degli oggetti da ordinare, oppure $k < n$ (in tal caso qualche tipologia è ripetuta più volte).
- Dato un insieme X , con $n = |X|$, una *permutazione* (semplice) è una sequenza (lista ordinata) degli n elementi di X.
- Indichiamo con P_n il numero delle permutazioni (semplici) di un insieme di n elementi. Risulta $P_n = D(n, n) = n!$.

  Dim.: Segue ovviamente dal fatto che una permutazione semplice di n elementi è una n-disposizione semplice degli n elementi. □
- Una *permutazione con ripetizione* è una sequenza di $n = n_1 + \ldots + n_k$ elementi dell'insieme $\{a_1, \ldots, a_k\}$ di cui l'elemento a_i è ripetuto n_i volte.
- Indichiamo con $P'^{\,n_1,\ldots,n_k}_n$ il numero delle permutazioni con ripetizione di n elementi di k tipologie in cui l'i-esima tipologia è ripetuta n_i volte. Risulta $P'^{\,n_1,\ldots,n_k}_n = n!/(n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!)$.

  Dim.: Segue ovviamente dal fatto che le possibili permutazioni di n elementi sono pari a $n!$, ma nel nostro caso data una delle permutazioni, questa risulta in effetti ripetuta $n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!$ volte in quanto risulta indistinguibile rispetto alle altre ottenute scambiando tra di loro le posizioni di elementi identici (di identica tipologia). □
- Esempi:
  - Consideriamo il campionato di calcio si serie A (20 squadre). Assumiamo che al termine della stagione non ci siano squadre con lo stesso punteggio: in questo caso, quante sono le diverse classifiche finali? R.: 20!
  - E, sempre assumendo che al termine della stagione non ci siano squadre con lo stesso punteggio, quante sono le diverse classifiche in cui la Roma arriva settima? R.: 19!
  - Quanti sono i possibili anagrammi della parola "omonimo"(includendo anche parole non di senso compiuto come "mooimon")? R.: $7!/(3! \cdot 2!) = 420$.

Combinazioni

- Supponiamo di voler contare quante diverse opportunità abbiamo di selezionare k oggetti (senza ordinarli) scelti tra n tipologie di oggetti. Distinguiamo il caso in cui possiamo selezionare al più un oggetto per ciascuna tipologia dal caso più generale in cui ciascuna tipologia può essere ripetuta (al più k volte) nella selezione.

- Dato un insieme X e un intero $k \leq n = |X|$, una *k-combinazione* (semplice) degli n elementi di X (ovvero una "combinazione semplice, di classe k, di n elementi") è un qualunque sottoinsieme (non ordinato) di X di cardinalità k.
- Indichiamo con $C(n, k)$ il numero di k-combinazioni di un insieme di n elementi. $C(n, k)$ è detto *coefficiente binomiale* ed è spesso indicato con $\binom{n}{k}$.
- $C(n, k) = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

  Dim.: E' sufficiente osservare che possiamo costruire tutte e sole le k-disposizioni di X a partire dalle k-combinazioni di X come segue: prendiamo una k-combinazione per volta e permutiamo in tutti i modi possibili i k elementi che la formano. In questo modo, ciascuna k-combinazione restituisce $k!$ distinte k-disposizioni. Quindi $D(n, k) = k!\ C(n, k)$. □
- $C(n, n-k) = C(n, k)$.

  Dim.: Infatti, dal risultato precedente, si ha $C(n, n-k) = \dfrac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $= C(n, k)$. □

  Ciò non deve sorprendere in quanto il numero di diverse scelte di k oggetti da un insieme di n oggetti è ovviamente uguale al numero di scelte degli $(n-k)$ oggetti da scartare.

  Si osservi che, in particolare, valgono le seguenti relazioni: $C(n, 0) = C(n, n) = 1$, $\forall\ n \geq 1$ (per definizione si pone anche $C(0, 0) = 1$); si noti che $C(n, 1) = C(n, n-1) = n$, $\forall\ n \geq 1$.
- *Identità di Pascal*. Siano n e k due interi positivi con $k \geq 1$ e $n \geq k$. Vale la seguente uguaglianza $C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$.

  Dim.: Sia a un elemento di un insieme X di $n+1$ elementi e contiamo separatamente le k-combinazioni che contengono a e le k-combinazioni che non contengono a. Per quanto riguarda le prime, osserviamo che esse sono in numero pari ai diversi modi di scegliere gli altri $k-1$ elementi da $X\backslash\{a\}$, ovvero $C(n, k-1)$. Per quanto riguarda le seconde, notiamo che esse sono in numero pari ai diversi modi di scegliere i k elementi da $X\backslash\{a\}$, ovvero $C(n, k)$. L'affermazione segue. □

  La precedente relazione, insieme al fatto che $C(n, 0) = C(n, n) = 1\ \forall\ n \geq 0$, è alla base del triangolo di Pascal (o di Tartaglia), che ci permette di calcolare, induttivamente, il valore di ogni coefficiente binomiale $C(n, k)$.
- $\sum_{k=0}^{n} C(n, k) = 2^n$.

  Dim.: Consideriamo un insieme X con n elementi. La quantità $\sum_{k=0}^{n} C(n, k)$ equivale a contare il numero di sottoinsiemi di cardinalità 0, più il numero di sottoinsiemi di cardinalità 1, ..., più il numero di sottoinsiemi di cardinalità n. Ovvero stiamo contando il numero di sottoinsiemi di X che è noto essere 2^n. □
- Dato un insieme X di n elementi, una *k-combinazione con ripetizione* di elementi di X (ovvero una "combinazione con ripetizione, di classe k, di n elementi") è una qualunque collezione (non ordinata) o multinsieme di cardinalità k costituito da elementi dell'insieme X, ciascuno ripetuto al più k volte.

- Indichiamo con $C'(n, k)$ il numero di k-combinazioni con ripetizione di un insieme di n elementi. Si dimostra il seguente risultato $C'(n, k) = C(n + k - 1, k) = \binom{n+k-1}{k}$.

- Esempi:

  - Quanti sono gli spigoli di K_n, grafo completo di n vertici? R.: $C(n, 2) = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$.
  - Consideriamo un insieme $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di n vertici di un grafo. Quanti sono i diversi grafi G con $V(G) = V$? R.: $2^{C(n, 2)}$.
    Infatti consideriamo l'insieme $K(V)$ formato da tutti i possibili spigoli tra vertici di V, sappiamo che $|K(V)| = C(n, 2)$. Osserviamo infine che c'è una corrispondenza 1 a 1 tra i grafi con $V(G) = V$ e i sottoinsiemi di $K(V)$. L'affermazione segue.
  - Ogni domenica, un impiegato molto preciso seleziona e ordina gli abiti per la settimana di lavoro, scegliendo un completo per Lunedì, uno per Martedì, e così via fino al Venerdì, senza ripeterli. Sapendo che nel suo guardaroba ci sono 20 abiti, in quanti modi può effettuare la selezione? R.: $D(20, 5) = 20!/15!$
  - Supponendo che l'impiegato oltre a scegliere un abito differente per i cinque giorni lavorativi della settimana, scelga anche 5 ulteriori abiti di riserva per tutta la settimana lavorativa, quante differenti selezioni può operare?

    R.: $D(20, 5) \cdot C(15, 5) = (20!/15!) \cdot (15!/(5! \cdot 10!))$.
  - Quanti sono i monomi di grado 5 di 3 incognite x, y, e z, cioè il numero di prodotti del tipo $x^{n_1} \cdot y^{n_2} \cdot z^{n_3}$, con $n = n_1 + n_2 + n_3 = 5$?

    R.: $C'(3, 5) = C(3 + 5 - 1, 5) = 21$.

- *Teorema binomiale*: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, x^{n-k} y^k$.

  Dim.: Osserviamo che $(x + y)^n$ può essere scritto come $(x + y) \cdot (x + y) \cdot \ldots \cdot (x + y)$, ovvero il prodotto del fattore $(x + y)$ ripetuto n volte. Se sviluppiamo questo prodotto, avremo la somma di termini del tipo $x^{n-k} y^k$, con $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Per calcolare il numero di occorrenze del singolo termine $x^{n-k} y^k$, osserviamo che questo numero è pari al numero di modi di scegliere k volte il termine y dagli n fattori $(x + y)$, ovvero il numero di modi di scegliere $n - k$ volte il termine x dagli n fattori $(x + y)$. L'affermazione segue e giustifica il nome di coefficiente binomiale per $C(n, k)$. $\square$

- Per un qualunque insieme X di n elementi, il numero dei sottoinsiemi di X di cardinalità pari è uguale al numero dei sottoinsiemi di X di cardinalità dispari.

  Dim.: Infatti, $\sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, (1)^{n-k} (-1)^k = (1 - 1)^n = 0$, per il teorema binomiale. Quindi,

  $$0 = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\,(-1)^k = \sum_{0 \le k \le n:\, k \text{ pari}} C(n,k) - \sum_{0 \le k \le n:\, k \text{ dispari}} C(n,k),$$

  ovvero il numero dei sottoinsiemi di cardinalità pari è uguale al numero dei sottoinsiemi di cardinalità dispari. $\square$

Riferimenti:

K.H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications*. Mc Graw-Hill, 2011 (pagg. 223–250).