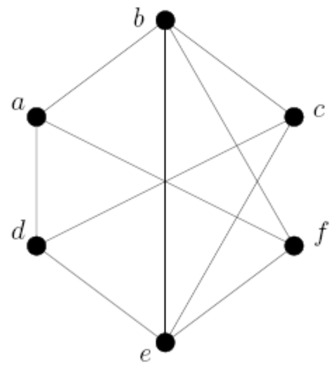
**Esercizi I Parte**

**1.** Un'azienda per poter svolgere un insieme $T$ di $n$ compiti distinti li deve assegnare ad un insieme $D$ di $m \geq n$ dipendenti, tenendo conto del fatto che non sono interscambiabili in quanto ognuno di essi possiede delle specializzazioni e quindi è in grado di eseguire un sottoinsieme specifico degli $n$ compiti: sia $T(j) \subseteq T$ il sottoinsieme di compiti che il dipendente $j \in D$ è in grado di svolgere. Assumendo che ciascun compito debba essere assegnato ad un dipendente e che ciascun dipendente possa svolgere al più un compito, l'azienda vuole sapere come assegnare i compiti ai dipendenti. Rappresentare il problema con un modello su grafo.

**2.** Un'azienda ha la necessità di schedulare un insieme $R$ di $n$ riunioni giornaliere di vari team, ma ha il vincolo che alcuni manager appartengono a team differenti e quindi non è possibile indire due riunioni nello stesso giorno se queste hanno un manager in comune; in tal caso queste due riunioni sono incompatibili. Sia $R(i)$ il sottoinsieme di riunioni incompatibili con la riunione $i$. L'azienda vuole schedulare le riunioni nel minor numero di giorni possibili. Rappresentare il problema con un modello su grafo.

**3.** Dato il grafo di figura




Specificare cosa rispettivamente rappresentano (percorso (*walk*), sentiero (*trail*), cammino, circuito o ciclo) i seguenti insiemi ordinati: $(a, b, c, e, b, c)$; $(a, b, c, e, b, f)$; $(a, b, c, e, b, f, a)$; $(a, b, c, d, e, f)$; $(a, b, c, d, e, f, a)$.

**4.** Dato il grafo (bipartito completo) $K_{n,n}$ quanti sono i suoi cammini ricoprenti che partono da un generico vertice $a$? **R.**: $n!\cdot(n-1)!$

**5.** Determinare il numero di 1-fattori in $K_{n,n}$. **R.**: $n!$

**6.** Determinare il numero di 2-fattori connessi in $K_{2n,2n}$. **R.**: $(2n)!\cdot(2n-1)!/2$

**7.** Fornire una stima Big-O della seguente funzione: $f(n) = n^2 + (n/\log n) \log n!$

**8.** Fornire una stima Big-O della seguente funzione: $f(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

**9.** Fornire una stima Big-O della seguente funzione: $f(n) = (\log n)^2 + \log n^2$

**10.** Mostrare che $C_5$ è isomorfo al suo complemento.

**11.** Disegnare tutte le classi di isomorfismo costituite da grafi con $n = 5$ vertici e $m = 5$ spigoli, anche non connessi, con vertici tutti di grado 2. **R.**: 1 classe: $C_5$

**12.** A partire da $K_4$, togliendo quattro spigoli, quanti grafi connessi posso ottenere? E quanti non connessi? **R.**: 0; $\binom{6}{2} = 15$

**13.** Dire quanti sono gli alberi con 4 vertici. E quante sono le loro classi di isomorfismo?

**R.**: $\binom{6}{3} - 4 = 16$; 2

**14.** Fornire una stima di tipo asintotico (cioè $O$ oppure $\Theta$) per le funzioni $f(n) = n^2 + n \log n^n + (n+5)(n+2) + 2^{10}n^2$; $g(n) = n^3 \log((2n)!) + 10n^5 + 5\binom{n}{3}$; $h(n) = 2n^2 + 5\binom{2n}{n} + n^{10}$.

**R.**: $f(n) = \Theta(n^2 \log n)$; $g(n) = \Theta(n^5)$; $h(n) = O(2^{2n})$

**15.** Quanti sono i grafi bipartiti $G = (X \cup Y, E)$ con 2 vertici nella classe $X$, 8 vertici nella classe $Y$ e tali che entrambi i vertici di $X$ abbiano grado 4? Si assuma che l'insieme dei vertici sia fisso, per esempio $X = \{x_1, x_2\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_8\}$.

**R.**: $\binom{8}{4} \cdot \binom{8}{4} = 4900$

**16.** Si consideri il grafo completo con 7 vertici $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Utilizzando l'algoritmo di Hierholzer, individuare un tour euleriano nell'ipotesi di: 1) risolvere tutte le situazioni di parità (i.e. quando sono possibili più scelte) secondo l'ordine alfabetico.

**R. 1**: $(a, b, c, d, e, f, g, e, c, f, d, g, c, a, d, b, e, a, f, b, g, a)$, concatenando inizialmente uno di seguito all'altro tutti i cicli che condividono il nodo iniziale

**R. 2**: $(a, f, g, e, c, d, e, f, d, g, c, f, b, g, a, d, b, e, a, b, c, a)$

**17.** Sia $K_{m,n}$ il grafo bipartito completo con $m$ vertici in una classe e $n$ nell'altra. a) Per quali valori di $m$ e $n$ il grafo $K_{m,n}$ ammette un circuito euleriano? b) Per quali valori di $m$ e $n$ il grafo complemento di $K_{m,n}$ ammette un circuito euleriano? **R.**: a) $m, n > 0$ e pari; b) $m = 0$ e $n$ dispari, oppure $n = 0$ e $m$ dispari.

**18.** Sia $G$ il grafo con insieme dei vertici $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ e spigoli definiti dalle seguenti liste di adiacenza $A(v)$. Fornire la distanza di ogni vertice dal vertice $a$. Dire quindi se il grafo è bipartito: in caso affermativo esibire una bipartizione, altrimenti, se esiste, uno spigolo la cui rimozione rende il grafo bipartito. Liste di adiacenza: $A(a) = \{c, g, h\}$; $A(b) = \{e, f\}$; $A(c) = \{a, e, f\}$; $A(d) = \{e\}$; $A(e) = \{b, c, d, h\}$; $A(f) = \{b, c, g, i\}$; $A(g) = \{a, f\}$; $A(h) = \{a, e\}$; $A(i) = \{f\}$.
**R.**: $d(a, a) = 0$, $d(a, b) = 3$, $d(a, c) = 1$, $d(a, d) = 3$, $d(a, e) = 2$, $d(a, f) = 2$, $d(a, g) = 1$, $d(a, h) = 1$, $d(a, i) = 3$. Dato che $d(a, u) \neq d(a, v)$ con uno dei due pari e l'altro dispari, per ogni $(u, v) \in E(G)$ (cioè $\nexists (u, v) \in E(G)$ tale che $d(a, u)$ e $d(a, v)$ sono entrambi pari (dispari)), il grafo è bipartito e una possibile bipartizione dei suoi vertici è data da: $V_1 = \{a, e, f\}$, $V_2 = \{b, c, d, g, h, i\}$

**19.** Qual è il massimo numero di archi che può avere un grafo (digrafo) aciclico con $n$ nodi?

**R.**: per un grafo (non orientato) aciclico, $m \leq n - 1$; nel caso di un digrafo aciclico, $\binom{n}{2}$.

**20.** Quanti sono i grafi $G$ con 8 vertici tali che $G$ e il suo complemento hanno lo stesso numero di spigoli? **R.**: $\binom{28}{14}$

**21.** Giustificare sinteticamente la seguente affermazione: in un grafo (semplice) esistono sempre due vertici che hanno lo stesso grado.
**R.**: Se fosse vero il contrario allora esisterebbe un grafo con $n$ vertici $\{1, 2, \ldots, n\}$ e con gradi $d(1) = 0$, $d(2) = 1, \ldots, d(n) = n - 1$, perché $0 \le d(i) \le n - 1$. Ma è impossibile che ci sia un vertice di grado $n - 1$ ed uno di grado 0. Quindi $d(i) \in \{0, 1, \ldots, n - 2\}$, oppure $d(i) \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$, ma in entrambi i casi, per il principio di *pigeonhole*, ci sono almeno due vertici di pari grado.

**22.** Sia $G$ un grafo che ammette un circuito euleriano e sia $(i, j)$ uno spigolo di $E(G)$. a) E' vero che il grafo $G - (i, j)$ è sempre connesso ? b) E' vero che il grafo $G - (i, j)$ ammette sempre un sentiero (trail) euleriano? **R.**: a) Sì; b) Sì.

**23.** Sia $G$ un grafo con $n$ vertici. a) E' vero che per $n$ pari è impossibile che $G$ e il suo complemento ammettano entrambi un circuito euleriano? E' vero che per $n$ dispari è impossibile che $G$ e il suo complemento ammettano entrambi un circuito euleriano? **R.**: a) Sì; b) No.

**24.** Un'azienda televisiva ha acquisito i diritti per trasmettere le partite del campionato di calcio di serie A (a 20 squadre). L'azienda vuole trasmettere tutte le partite trasmettendo ovviamente su canali diversi gli incontri che si svolgono simultaneamente. Sapendo che in contemporanea a ciascuna partita se ne svolgono al più altre 4, è vero che l'azienda riesce a trasmettere tutti gli incontri utilizzando a) al più 5 canali, b) al più 6 canali, c) al più 10 canali? **R.**: a) Sì; b) Sì; c) Sì.

**25.** Quanti sono i triangoli (cicli di tre vertici) contenuti in $K_n$ con $n = 10$? Quanti sono i cicli di 4 vertici? Quanti sono i cicli di $q \le n = 10$ vertici? **R.**: 120; 630; $\binom{10}{q}\frac{(q-1)!}{2}$.

**26.** Quanti sono i quadrati (cicli di quattro vertici) contenuti in $K_{n,n}$ con $n = 10$? Quanti sono i cicli (pari) di $2q$ vertici (con $q \le n = 10$)? **R.**: 2025; $\binom{10}{q}\binom{10}{q}\frac{(q-1)!q!}{2}$.

**27.** Sia $D_n = (V, A)$ il digrafo fortemente completo di $n$ nodi (n.b.: $(i, j)$ e $(j, i) \in A$, per ogni coppia di nodi $i, j$ con $i \neq j$). Quanti sono i possibili cammini da $i$ a $j$ in $D_n$?

**R.**: $\sum_{k=0}^{n-2} D(n-2, k) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} k!$

**28.** Quali sono i grafi $G$ tali che $G$ e il suo complemento $\hat{G}$ sono entrambi alberi? E quanti sono?
**R.**: Il grafo con $n = 1$ vertici e i grafi con $n = 4$ vertici che sono cammini di 3 spigoli. Sono 13 grafi.