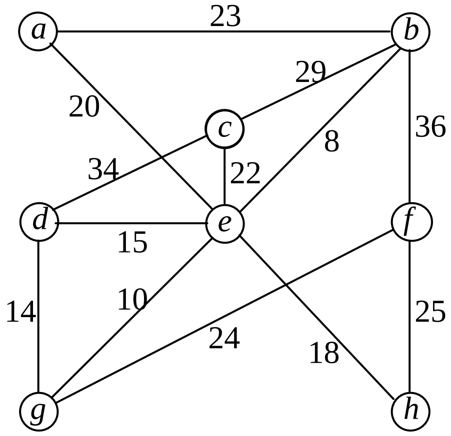
Esercizi II Parte

1. Per il grafo $G = (V, E)$ pesato sugli spigoli riportato nella seguente figura determinare un albero ricoprente di peso minimo con l'algoritmo di Prim.



Certificare l'ottimalità della soluzione.

2. Per il grafo $G = (V, E)$ pesato sugli spigoli, con $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e lista ordinata degli spigoli in senso non-decrescente dei loro pesi insieme ai pesi stessi riportata nella seguente tabella, determinare un albero ricoprente di peso minimo.

$(i, j) \in E$	(e, f)	(d, e)	(a, b)	(d, f)	(a, g)	(a, c)	(c, e)	(f, g)	(b, c)	(a, e)	(b, d)	(c, d)	(e, g)
c_{ij}	12	15	16	18	20	22	23	25	28	29	31	32	35

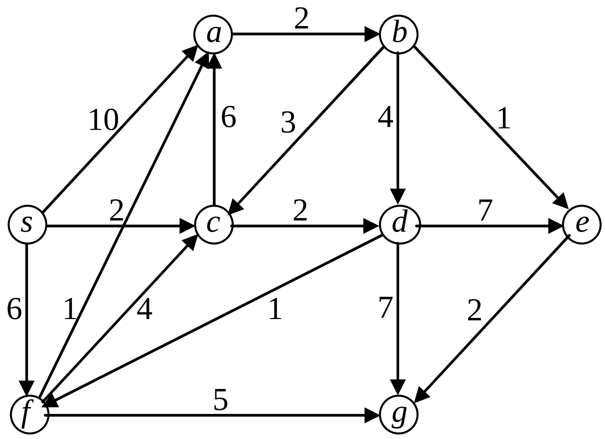
Certificare l'ottimalità della soluzione.

3. Si consideri la rete $R = (N, A, \mathbf{c})$, con $N = \{s, a, b, c, d, e, f, g\}$ con lista di adiacenze $A(i)$ e costi c_{ij} degli archi $(i, j) \in \Gamma^+(i)$, per ogni $i \in N$, riportate nella seguente tabella.

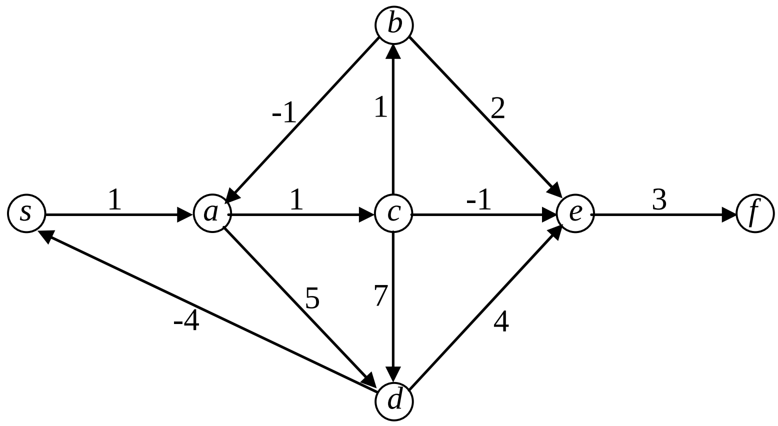
nodo i	Lista $(j\ , c_{ij})$ per ogni $j \in A(i)$
s	$(a, 2), (b, 5), (c, 4), (d, 1)$
a	$(b, 4), (e, 5)$
b	$(c, 6), (e, 13)$
c	$(d, 5), (e, 3)$
d	$(e, 8), (f, 4), (g, 8)$
e	$(f, 7)$
f	$(g, 1)$
g	-

Applicando l'algoritmo che si ritiene più efficiente, individuare un albero di cammini minimi a partire dal nodo s.

4. Applicando l'algoritmo più opportuno, individuare un albero di cammini minimi dal nodo *s* per la rete riportata nella seguente figura, dove il valore associato ad ogni arco ne rappresenta il costo.



5. Applicando l'algoritmo più opportuno, individuare un albero di cammini minimi dal nodo *s* per la rete riportata nella seguente figura, dove il valore associato ad ogni arco ne rappresenta il costo.



6. E' data una rete orientata e capacitata sugli archi. Siano *s* e *t* due nodi della rete. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, giustificandone la risposta.

a) Se le capacità sono intere su ogni arco, il valore del massimo flusso da *s* a *t* è certamente intero. **R.**: V

b) Se le capacità non sono intere su ogni arco, il valore del massimo flusso da *s* a *t* è certamente non intero. **R.**: F

c) Se le capacità sono intere sulla stella uscente di *s*, il valore del massimo flusso da *s* a *t* è certamente intero. **R.**: F

d) Se le capacità sono intere su ogni arco, esiste certamente un massimo flusso da *s* a *t* che è intero su ogni arco della rete. **R.**: V

7. Si consideri la rete capacitata $R = (N, A, \mathbf{u})$, con $N = \{s, a, b, c, d, e, f, t\}$ e lista archi (i, j) e relative capacità u_{ij} e flusso iniziale x_{ij} riportati nella seguente tabella.

$(i, j) \in A$	(s, a)	(s, b)	(s, c)	(a, b)	(a, e)	(b, c)	(b, d)	(b, e)	(c, d)	(d, f)	(e, t)	(f, t)
u_{ij}	3	4	8	4	2	5	2	2	6	3	5	4
x_{ij}	2	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	2

Individuare un flusso massimo da $s \in N$ a $t \in N$ in R, partendo dal flusso iniziale e certificarne l'ottimalità. Di quanto varia il valore del massimo del flusso se la capacità dell'arco (s, a) aumenta di 2 unità? Giustificare la risposta riportando un nuovo cammino aumentante e la variazione del flusso su tale cammino, oppure fornire un certificato di ottimalità.

8. Si consideri il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ e lista spigoli (i, j) e relativi pesi c_{ij} riportati nella seguente tabella.

$(i, j) \in E$	(a, b)	(a, d)	(b, c)	(b, e)	(c, f)	(c, i)	(d, e)	(d, g)	(e, f)	(f, i)	(g, h)	(h, i)
c_{ij}	3	5	$2t$	$3t$	8	8	7	9	6	$18 - 2t$	$15 - t$	4

Per quali valori del parametro t l'albero $T = (V, E(T))$ con $E(T) = \{(a, b), (a, d), (c, f), (c, i), (d, e), (d, g), (e, f), (h, i)\}$ è un minimo albero ricoprente di G?

9. Si consideri la rete $R = (N, A, \mathbf{c})$, con $N = \{s, a, b, c, d\}$ e lista archi $(i, j) \in A$ e relativi costi c_{ij} riportati nella seguente tabella.

$(i, j) \in A$	(s, a)	(s, c)	(a, b)	(a, d)	(b, c)	(d, b)
c_{ij}	3	15	5	2	$2 + t$	$2t$

Per quali valori del parametro t l'arborescenza esterna ricoprente $T = (N, A(T))$ radicata in $s \in N$ con $A(T) = \{(s, a), (a, b), (a, d), (b, c)\}$ è l'arborescenza (albero) dei cammini minimi da s in R?

10. Data un'arborescenza esterna capacitata $T = (N(T), A(T), \mathbf{u})$ e radicata in $s \in N(T)$, con capacità u_{ij} per ogni $(i, j) \in A(T)$, si consideri il problema di determinare il massimo flusso da s a t, per ogni $t \in N(T)\backslash\{s\}$. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa.

a) Il valore del massimo flusso da s a t è pari alla somma delle capacità degli archi che appartengono al cammino $(s, \ldots, t)$. **R.**: F

b) Il valore del massimo flusso da s a t è pari al minimo delle capacità degli archi che appartengono al cammino $(s, \ldots, t)$. **R.**: V

c) Il valore del massimo flusso da s a t è pari al massimo delle capacità degli archi che appartengono al cammino $(s, \ldots, t)$. **R.**: F

11. Si consideri il grafo bipartito $B = (X \cup Y, E)$ con $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{(a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 3), (e, 3)\ (e, 5), (f, 5)\}$. Verificare se esso ammette un abbinamento Y-completo (cioè tale che ogni vertice di Y è abbinato ad uno di X), e in caso negativo fornire un insieme $Q \subseteq Y$ che viola la condizione di Hall. Determinare inoltre un vertex cover di cardinalità minima e un insieme stabile di cardinalità massima di B. Risolvere l'esercizio tramite l'algoritmo dei cammini alternanti aumentati e/o riconducendo il problema ad un problema di massimo flusso su una opportuna rete. Certificare l'ottimalità della soluzione ottenuta. Risolvere l'esercizio anche per il grafo bipartito $B' = (X \cup Y, E')$ con $E' = E\backslash\{(3, d), (3, e)\} \cup \{(2, d)\}$.