M. CARAMIA, S. GIORDANI, F. GUERRIERO, R. MUSMANNO, D. PACCIARELLI

OTTIMIZZAZIONE SU RETE

Isedi – De Agostini Scuola SpA, 2019

Esercizi proposti nel Cap. 1 - Soluzioni

Esercizio 1.1

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, numero di bottiglie di liquore trasportati dal deposito i = 1, 2, 3 al punto vendita j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Modello

$$
\begin{aligned}
\min \quad z = {} & 2x_{11} + 2{,}4x_{12} + 2x_{13} + 2{,}3x_{14} + 2{,}8x_{15} + 3x_{16} \\
& + 2{,}5x_{21} + 3x_{22} + 1{,}8x_{23} + 2x_{24} + 2{,}6x_{25} + 2{,}4x_{26} \\
& + 2{,}2x_{31} + 3{,}3x_{32} + 2{,}6x_{33} + 2{,}5x_{34} + 2{,}9x_{35} + 3{,}1x_{36}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \leq 1200 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \leq 2.000 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \leq 2.400 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} = 900 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1.200 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} = 700 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1000 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} = 600 \\
x_{16} + x_{26} + x_{36} = 450 \\
x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.
\end{gathered}
$$

La soluzione ottima del problema (determinata ad esempio utilizzando il risolutore di Excel) è x^*_{12} = 1.200, x^*_{23} = 700, x^*_{24} = 850, x^*_{26} = 450, x^*_{31} = 900, x^*_{34} = 150, x^*_{35} = 600 bottiglie e i valori delle altre variabili di decisione pari a 0, con valore di funzione obiettivo pari a z^* = 11.015 €.

Esercizio 1.2

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, quintali di arance trasportate da i = 1, 2, 3 a j = 1, 2, 3.

Modello

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = {} & 9(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 10(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 12(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \\
& - 3(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 4(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 5(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\
& - 0{,}01(8x_{12} + 7x_{22} + 10x_{32}) - 0{,}002(6x_{11} + 5x_{21} + 9x_{31} + 6x_{13} + 8x_{23} + 11x_{33})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 45 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 32 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 26 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} = 22
\end{gathered}
$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 13$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 18$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3.$$

La soluzione ottima del problema è $x^*_{11} = 22$, $x^*_{12} = 5$, $x^*_{13} = 18$, $x^*_{22} = 8$ quintali, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 375{,}56$ €.

Esercizio 1.3

Il problema può essere formulato e risolto utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ijk}, quantità (in sacchi da 3 quintali) di caffè trasportata da $i = 1, 2$ a $j = 1, 2, 3$ attraverso il porto di transito $k = 1, 2, 3$.

Come porto di transito oltre a Gioia Tauro e Taranto è stato considerato un nodo fittizio per rappresentare le operazioni di trasporto diretto. I coefficienti di costo c_{ijk} inseriti nella funzione obiettivo sono dati dalla somma dei costi di trasporto c_{ij} e c_{jk}.

Modello

$$\min\ z = 24{,}4x_{111} + 20{,}2x_{121} + 19{,}75x_{131} + 15{,}65x_{112} + 20{,}95x_{122} + 19{,}7x_{132} + 18x_{113} + 20{,}5x_{123} + 17x_{133}$$
$$+ 20{,}4x_{211} + 16{,}2x_{221} + 15{,}75x_{231} + 16{,}15x_{212} + 21{,}45x_{222} + 20{,}2x_{232} + 15{,}75x_{213} + 15x_{223} + 10{,}2x_{233}$$
$$x_{111} + x_{121} + x_{131} + x_{112} + x_{122} + x_{132} + x_{113} + x_{123} + x_{133} \leq 3.000$$
$$x_{211} + x_{221} + x_{231} + x_{212} + x_{222} + x_{232} + x_{213} + x_{223} + x_{233} \leq 3.000$$
$$x_{111} + x_{112} + x_{113} + x_{211} + x_{212} + x_{213} = 1.600$$
$$x_{121} + x_{122} + x_{123} + x_{221} + x_{222} + x_{223} = 1.900$$
$$x_{131} + x_{132} + x_{133} + x_{231} + x_{232} + x_{233} = 1.450$$
$$x_{ijk} \geq 0,\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3.$$

La soluzione ottima del problema è $x^*_{112} = 1.600$, $x^*_{121} = 350$, $x^*_{223} = 1.550$, $x^*_{233} = 1.450$ sacchi e i valori delle altre variabili di decisione pari a 0, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 70.150$ €.

Esercizio 1.4

Il problema può essere formulato e risolto come problema di massimo flusso dal nodo s al nodo t sulla rete $R = (N, A, u)$ rappresentata in Figura 1.9, utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, flusso sull'arco $(i, j) \in A$;

v, flusso netto uscente dal nodo sorgente $s \in N$.

Modello

$$\max\ z = v$$
$$x_{s1} + x_{s2} + x_{s3} = v$$
$$x_{12} + x_{14} - x_{s1} - x_{31} = 0$$
$$x_{26} - x_{s2} - x_{12} = 0$$
$$x_{31} + x_{34} + x_{35} - x_{s3} = 0$$

$$x_{46} + x_{4t} - x_{14} - x_{34} - x_{54} = 0$$
$$x_{54} + x_{5t} - x_{35} = 0$$
$$x_{6t} - x_{26} - x_{46} = 0$$
$$-x_{4t} - x_{5t} - x_{6t} = -v$$
$$0 \leq x_{s1} \leq 35$$
$$0 \leq x_{s2} \leq 25$$
$$0 \leq x_{s3} \leq 50$$
$$0 \leq x_{12} \leq 40$$
$$0 \leq x_{14} \leq 50$$
$$0 \leq x_{26} \leq 80$$
$$0 \leq x_{31} \leq 35$$
$$0 \leq x_{34} \leq 30$$
$$0 \leq x_{35} \leq 40$$
$$0 \leq x_{46} \leq 20$$
$$0 \leq x_{4t} \leq 60$$
$$0 \leq x_{54} \leq 50$$
$$0 \leq x_{5t} \leq 20$$
$$0 \leq x_{6t} \leq 90.$$

La soluzione ottima del problema è $x^*_{s1} = 35$, $x^*_{s2} = 5$, $x^*_{s3} = 50$, $x^*_{12} = 5$, $x^*_{14} = 40$, $x^*_{26} = 10$, $x^*_{31} = 10$, $x^*_{34} = 0$, $x^*_{35} = 40$, $x^*_{46} = 0$, $x^*_{4t} = 60$, $x^*_{54} = 20$, $x^*_{5t} = 20$, $x^*_{6t} = 10$, $v^* = 90$, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 90$.

Esercizio 1.5

Il problema può essere formulato e risolto come problema dell'assegnamento utilizzando le seguenti variabili di decisione:

- x_{ij}, variabile binaria che vale 1 se il veicolo $i = 1, 2, 3, 4, 5$ è assegnato all'ordine di spedizione $j = 1, 2, 3, 4$, altrimenti vale 0.

Modello

$$\min \quad z = 177x_{11} + 417x_{12} + 612x_{13} + 218x_{14} + 146x_{21} + 504x_{22} + 699x_{23} + 188x_{24} + 270x_{31} + 31x_{32}$$
$$+ 728x_{33} + 334x_{34} + 873x_{41} + 369x_{42} + 156x_{43} + 700x_{44} + 380x_{51} + 642x_{52} + 840x_{53} + 445x_{54}$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 1$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \leq 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5;\ j = 1, 2, 3, 4.$$

La soluzione ottima del problema è $x^*_{14} = 1$, $x^*_{21} = 1$, $x^*_{32} = 1$, $x^*_{43} = 1$ e i valori delle altre variabili di decisione pari a 0, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 551$ km.

Esercizio 1.6

Il problema può essere formulato e risolto come problema di massimo flusso dal nodo o al nodo d sulla rete $R = (N, A, u)$ rappresentata in Figura 1.10, utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, flusso (m^3/min) sull'arco $(i, j) \in A$;

v, flusso netto uscente dal nodo sorgente $o \in N$.

Modello

$$\max \quad z = v$$
$$x_{o1} + x_{o2} - x_{do} = v$$
$$x_{14} - x_{o1} = 0$$
$$x_{24} + x_{23} - x_{o2} = 0$$
$$x_{34} + x_{3d} - x_{23} = 0$$
$$x_{4d} - x_{14} - x_{24} - x_{34} = 0$$
$$x_{do} - x_{3d} - x_{4d} = -v$$
$$0 \leq x_{o1} \leq 2$$
$$0 \leq x_{o2} \leq 10$$
$$0 \leq x_{14} \leq 6$$
$$0 \leq x_{23} \leq 5$$
$$0 \leq x_{24} \leq 2$$
$$0 \leq x_{34} \leq 3$$
$$0 \leq x_{3d} \leq 8$$
$$0 \leq x_{4d} \leq 4$$
$$0 \leq x_{do} \leq 6.$$

La soluzione ottima del problema è $x^*_{o1} = 2$, $x^*_{o2} = 7$, $x^*_{14} = 2$, $x^*_{23} = 5$, $x^*_{24} = 2$, $x^*_{34} = 0$, $x^*_{3d} = 5$, $x^*_{4d} = 4$, $x^*_{do} = 0$, $v^* = 9$ m^3/min, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 9$ m^3/min.

Esercizio 1.7

Il problema può essere formulato e risolto come problema di flusso a costo minimo sulla rete $R = (N, A, c, b, u)$ rappresentata in Figura 1.11 e assumendo $b_o = 90$ tonnellate per il nodo o rappresentante l'impianto produttivo, $b_3 = b_4 = b_8 = -30$ tonnellate per i tre nodi 3, 4, 8, rappresentanti le tre discariche, e $b_i = 0$ per i restanti nodi di transito $i = 1, 2, 5, 6, 7$. Si utilizzano le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, flusso (tonnellate) sull'arco $(i, j) \in A$.

Modello

$$\min \quad z = 90x_{o1} + 8x_{o3} + 40x_{o6} + 20x_{o7} + 30x_{12} + 10x_{13} + 40x_{32}$$
$$+ 30x_{45} + 20x_{53} + 30x_{58} + 50x_{63} + 20x_{65} + 10x_{76} + 20x_{83} + 50x_{84}$$
$$x_{o1} + x_{o3} + x_{o6} + x_{o7} = 90$$
$$x_{12} + x_{13} - x_{o1} = 0$$
$$-x_{12} - x_{32} = 0$$
$$x_{32} - x_{o3} - x_{13} - x_{53} - x_{63} - x_{83} = -30$$
$$x_{45} - x_{84} = -30$$
$$x_{53} + x_{58} - x_{45} - x_{65} = 0$$
$$x_{63} + x_{65} - x_{o6} - x_{76} = 0$$
$$x_{76} - x_{o7} = 0$$
$$x_{83} + x_{84} - x_{58} = -30$$
$$0 \le x_{o1} \le 70$$
$$0 \le x_{o3} \le 40$$
$$0 \le x_{o6} \le 30$$
$$0 \le x_{o7} \le 80$$
$$0 \le x_{12} \le 30$$
$$0 \le x_{13} \le 50$$
$$0 \le x_{32} \le 30$$
$$0 \le x_{45} \le 50$$
$$0 \le x_{53} \le 70$$
$$0 \le x_{58} \le 60$$
$$0 \le x_{63} \le 50$$
$$0 \le x_{65} \le 60$$
$$0 \le x_{76} \le 70$$
$$0 \le x_{83} \le 60$$
$$0 \le x_{84} \le 50.$$

La soluzione ottima del problema è $x^*_{o1} = 0$, $x^*_{o3} = 30$, $x^*_{o6} = 0$, $x^*_{o7} = 60$, $x^*_{58} = 60$, $x^*_{65} = 60$, $x^*_{76} = 60$, $x^*_{84} = 30$ tonnellate e i valori delle altre variabili di decisione pari a 0, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 6.540$ €.

Esercizio 1.8

Il problema può essere formulato e risolto come problema di trasporto, utilizzando le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, numero di beni trasportati settimanalmente dall'impianto di produzione P_i, i = 1, 2, 3, al cliente C_j, j = 1, 2, 3, 4.

Modello

$$\min \quad z = 10x_{11} + 16x_{12} + 12x_{13} + 8x_{14}$$
$$+ 7x_{21} + 8x_{22} + 15x_{23} + 5x_{24}$$
$$+ 6x_{31} + 20x_{32} + 9x_{33} + 4x_{34}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 300$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 400$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 500$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 350$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 250$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 450$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0.$$

La soluzione ottima del problema è $x^*_{11} = 50$, $x^*_{13} = 250$, $x^*_{21} = 50$, $x^*_{22} = 350$, $x^*_{31} = 50$, $x^*_{34} = 450$ unità e i valori delle altre variabili di decisione pari a 0, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 8.750$ €.

Esercizio 1.9

Analogamente all'Esercizio 1.7, il problema può essere formulato e risolto come problema di flusso a costo minimo sulla rete $R = (N, A, c, b, u)$ associata al grafo in Figura 1.12. In particolare date le lunghezze δ_{ij} degli archi stradali riportati nella figura, si assumono i costi unitari di trasporto $c_{ij} = \delta_{ij} \cdot g/t$ (in €/quintale), e le capacità $u_{ij} = +\infty$ su ciascun arco $(i, j) \in A$; si assume $b_o = 200$ quintali per il nodo o rappresentante il centro di produzione, $b_d = –200$ per il nodo o rappresentante il centro di stoccaggio, e $b_i = 0$ per i restanti nodi di transito $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Tuttavia, essendo la rete non capacitata e visto che i costi di trasporto sono proporzionali alle distanze percorse, il problema può esser ricondotto al problema del cammino minimo singola origine-singola destinazione sulla rete $R = (N, A, \delta)$, dove dal nodo o al nodo d. Si utilizzano le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, flusso sull'arco $(i, j) \in A$.

Modello

$$\min \quad z = 90x_{o1} + 8x_{o3} + 40x_{o6} + 20x_{o7} + 30x_{12} + 10x_{13} + 40x_{32}$$
$$+ 30x_{45} + 20x_{53} + 30x_{5d} + 50x_{63} + 20x_{65} + 10x_{76} + 20x_{d3} + 50x_{d4}$$
$$x_{o1} + x_{o3} + x_{o6} + x_{o7} = 1$$
$$x_{12} + x_{13} - x_{o1} = 0$$
$$-x_{12} - x_{32} = 0$$
$$x_{32} - x_{o3} - x_{13} - x_{53} - x_{63} - x_{d3} = 0$$
$$x_{45} - x_{d4} = 0$$
$$x_{53} + x_{5d} - x_{45} - x_{65} = 0$$
$$x_{63} + x_{65} - x_{o6} - x_{76} = 0$$
$$x_{76} - x_{o7} = 0$$
$$x_{d3} + x_{d4} - x_{5d} = -1$$
$$x_{ij} \geq 0, (i, j) \in A.$$

La soluzione ottima del problema del cammino minimo è $x^*_{o7} = 1$, $x^*_{76} = 1$, $x^*_{65} = 1$, $x^*_{5d} = 1$ e i valori delle altre variabili di decisione pari a 0, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 80$ km. Assumendo quindi di impiegare $200/t = 200/50 = 4$ autocarri per trasportare i 200 quintali di pomodori da o a d, ad un costo di $g = 10$ €/km, e facendo ovviamente percorrere a tutti gli autocarri il cammino minimo $(o, 7, 6, 5, d)$ di lunghezza

80 km si ottiene una soluzione di costo (minimo) pari a 3.200 €.

Esercizio 1.10

Il problema può essere formulato e risolto come problema di flusso a costo minimo sulla rete $R = (N, A, c, b, u)$ rappresentata in Figura 1.13, dove b_i è pari al valore associato al nodo $i \in N$, e le capacità $u_{ij} = +\infty$ su ciascun arco $(i, j) \in A$. Si utilizzano le seguenti variabili di decisione:

x_{ij}, flusso (container trasportati) sull'arco $(i, j) \in A$.

Modello

$$\min \quad z = 30x_{12} + 30x_{21} + 40x_{13} + 40x_{31} + 20x_{14} + 20x_{41} + 30x_{23} + 30x_{32} + 55x_{34} + 55x_{43} + 30x_{35} + 30x_{53} + 40x_{45} + 40x_{54} + 50x_{46} + 50x_{64} + 70x_{47} + 70x_{74} + 30x_{56} + 30x_{65} + 25x_{67} + 25x_{76}$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} - x_{21} - x_{31} - x_{41} = -10$$

$$x_{21} + x_{23} - x_{12} - x_{32} = 20$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} - x_{13} - x_{23} - x_{43} = 50$$

$$x_{41} + x_{43} + x_{45} + x_{46} + x_{47} - x_{14} - x_{34} - x_{54} - x_{64} - x_{74} = 20$$

$$x_{53} + x_{54} + x_{56} - x_{35} - x_{45} - x_{65} = -50$$

$$x_{64} + x_{65} + x_{67} - x_{46} - x_{56} - x_{76} = -20$$

$$x_{74} + x_{76} - x_{47} - x_{67} = -10$$

$$x_{ij} \geq 0, \ (i, j) \in A.$$

La soluzione ottima del problema è $x^*_{21} = 10$, $x^*_{23} = 10$, $x^*_{35} = 60$, $x^*_{46} = 10$, $x^*_{47} = 10$, $x^*_{56} = 10$ container e i valori delle altre variabili di decisione pari a 0, con valore di funzione obiettivo pari a $z^* = 3.900$ €.