

Esercizi proposti nel Cap. 2 - Soluzioni

Esercizio 2.1

Un percorso di G è $(1, 4, 5, 2, 4, 5, 6)$; un sentiero di G è $(1, 4, 5, 2, 4, 6)$; un cammino di G è $(1, 4, 6)$. Il grafo $\bar{G} = (\mathcal{V}(\bar{G}), \mathcal{E}(\bar{G}))$ complemento di G è rappresentato in Figura S2.1.

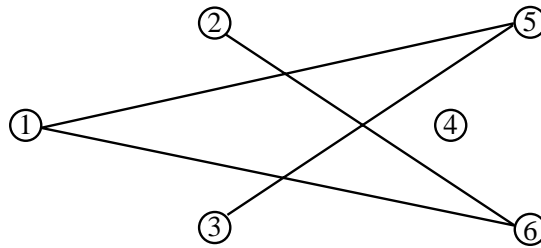


Figura S2.1 Rappresentazione del grafo complemento di G .

Un 2-fattore di G è rappresentato in Figura S2.2.

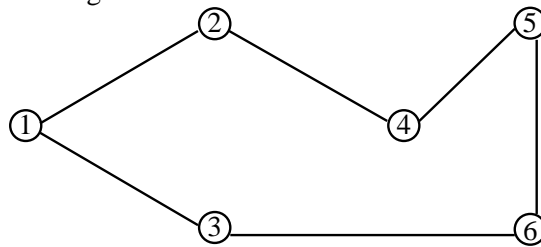


Figura S2.2 Rappresentazione di un 2-fattore di G .

Un sottografo di G è rappresentato in Figura S2.3.

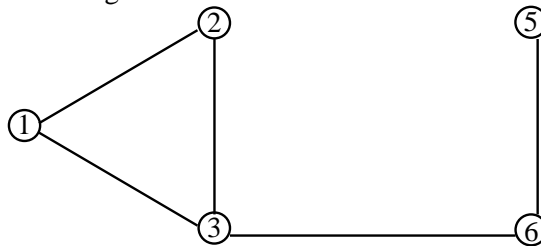


Figura S2.3 Rappresentazione di un sottografo di G .

Un sottografo indotto di G è rappresentato in Figura S2.4.

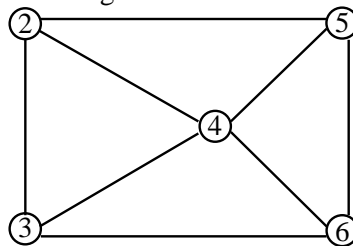


Figura S2.4 Rappresentazione di un sottografo indotto di G .

Un sottografo ricoprente di G è rappresentato in Figura S2.5.

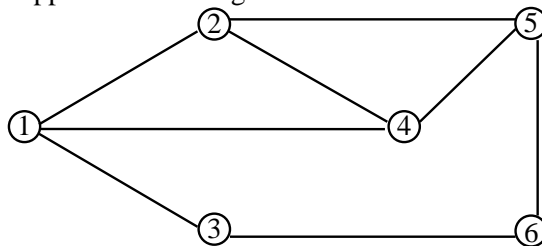


Figura S2.5 Rappresentazione di un sottografo ricoprente di G .

Esercizio 2.2

Un grafo connesso con n vertici presenta almeno $n - 1$ spigoli, quindi l'affermazione non è corretta non essendo tale per i grafi di ordine $n > 2$; negli altri casi, escludendo il caso banale del grafo con un solo vertice, l'affermazione vale solo per il grafo completo di due vertici, K_2 .

Esercizio 2.3

Detta d la somma dei gradi dei vertici di grado dispari e detta p la somma dei gradi dei vertici di grado pari di un grafo, dal teorema di «Handshaking» segue che $d + p = 2m$, dove m è il numero degli spigoli del grafo. Siccome p e $2m$ sono entrambi numeri pari, segue che anche d è pari. Ma essendo d una somma di numeri dispari (i gradi dei vertici di grado dispari) il numero degli addendi della somma, cioè il numero dei vertici di grado dispari, è ovviamente pari.

Esercizio 2.4

In generale il numero di grafi distinti che si possono ottenere da K_4 eliminando quattro dei suoi spigoli è pari al numero di sottografi di K_4 con 2 spigoli, cioè il numero di 2-combinazioni di 6 elementi, $C(6, 2) = 6!/(4!2!) = 15$. Tutti questi distinti grafi sono non connessi in quanto il numero degli spigoli, 2, è inferiore a 3, che costituisce il minimo numero di spigoli che può avere un grafo connesso di 4 vertici.

Esercizio 2.5

Detto m il numero degli spigoli di un grafo G di n vertici e \bar{m} il numero degli spigoli del suo grafo complemento \bar{G} , è noto che $m + \bar{m} = n(n - 1)/2$. Essendo in particolare G e \bar{G} entrambi degli alberi si ha che $m = \bar{m} = n - 1$ e la precedente relazione si specializza nella seguente: $2n - 2 = n(n - 1)/2$; da cui segue che: $n = 1; 4$. Quindi, oltre al caso banale costituito dall'albero con un solo vertice, l'albero avrà $n = 4$ vertici ed in particolare può essere solo un cammino di tre spigoli, come quello rappresentato in Figura S2.6.



Figura S2.6 Un albero di 4 vertici tale che anche il suo complemento sia un albero.

Esercizio 2.6

Lo spigolo (d, e) è l'unico ponte; il vertice d è l'unico punto di articolazione.

Esercizio 2.7

Le affermazioni sono entrambe corrette, infatti:

- essendo G euleriano, per definizione è connesso, ed ammettendo un circuito euleriano presenta almeno un circuito che passa (eventualmente più volte) per ogni nodo. E' evidente quindi che rimuovendo lo spigolo (i, j) da G tale circuito diventerà un sentiero che continua a passare (eventualmente più volte) per ogni nodo e pertanto il grafo rimane connesso;
- la rimozione di (i, j) da G inoltre fa sì che i vertici i e j assumono grado dispari mentre sugli altri vertici il grado (pari) non varia e quindi $G - (i, j)$, essendo connesso, ammette un sentiero Euleriano.

Esercizio 2.8

Per le affermazioni riportate nell'esercizio vale rispettivamente quanto segue:

- l'affermazione è vera; in effetti, tralasciando il caso banale di grafo con un solo vertice, per ciascun grafo completo di $n > 1$ vertici $\{1, 2, \dots, n\}$ è sempre possibile esibire l'esistenza del ciclo $(1, 2, \dots, n, 1)$ in quanto gli spigoli $(n, 1)$ e $(i, i+1)$, con $i = 1, 2, \dots, n - 1$, appartengono all'insieme degli spigoli del grafo;
- l'affermazione è falsa; infatti non vale per i grafi completi di ordine pari poiché i vertici hanno grado dispari;
- l'affermazione è falsa; il grafo completo di ordine 2 è bipartito.

Esercizio 2.9

Per calcolare la distanza $d(a, v)$ di ogni vertice $v \in \mathcal{V} \setminus \{a\}$ dal vertice a applichiamo l'algoritmo di ricerca in ampiezza dal vertice a ottenendo l'albero di ricerca rappresentato dalla Figura S2.7.

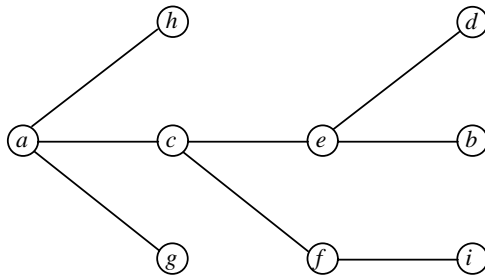


Figura S2.7 L'albero di ricerca in ampiezza.

Dall'albero di ricerca in ampiezza possiamo risalire alle distanze $d(a, v)$, $v \in \mathcal{V} \setminus \{a\}$: $d(a, b) = 3$; $d(a, c) = 1$; $d(a, d) = 3$; $d(a, e) = 2$; $d(a, f) = 2$; $d(a, g) = 1$; $d(a, h) = 1$; $d(a, i) = 3$.

Il grafo è bipartito perché non esistono spigoli tra vertici che si trovano a distanza pari (dispari) da a : le classi di bipartizione sono rispettivamente il sotto-insieme dei vertici a distanza pari da a (incluso a stesso), $X = \{a, e, f\}$, e il sotto-insieme dei vertici a distanza dispari da a , $Y = \{b, c, d, g, h, i\}$.

Esercizio 2.10

Nonostante il grafo sia connesso (come si può facilmente verificare) non risulta euleriano in quanto presenta vertici (specificatamente i vertici d e m) di grado dispari.

Esercizio 2.11

Sottintendendo il digrafo semplice e privo di cappi, l'affermazione è corretta in quanto è possibile associare al più un arco ad ogni coppia ordinata di nodi, il cui numero è pari alle 2-permutazioni di n oggetti, cioè $n(n - 1)$.

Esercizio 2.12

Un percorso orientato è (a, c, d, e, b, c, f) ; un cammino orientato è (a, d, e, f) ; un ciclo orientato è (a, d, b, a) . Il grafo sottostante è quello rappresentato in Figura S2.8.

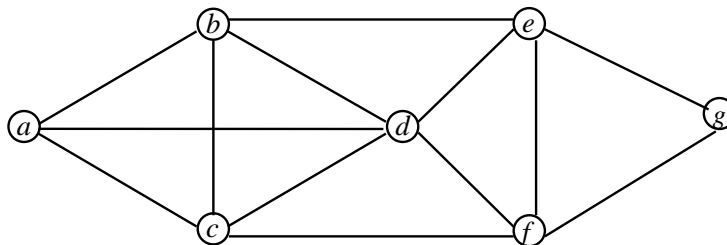


Figura S2.8 Il grafo sottostante il digrafo.

Una arborescenza (ricoprente) esterna radicata nel nodo a è rappresentata in Figura S2.9.

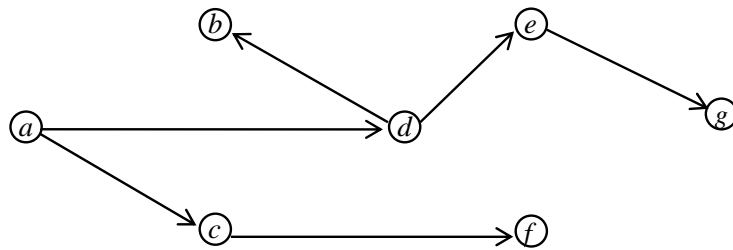


Figura S2.9 Una arborescenza esterna radicata in a .

Ai fini della verifica algoritmica della connessione debole del digrafo si riporta nella Figura S2.10 l'albero di ricerca generato dalla visita (in ampiezza) del grafo sottostante. Come si può notare tale albero costituisce un albero ricoprente del grafo sottostante il digrafo che quindi risulta connesso, provando la connessione debole del digrafo.

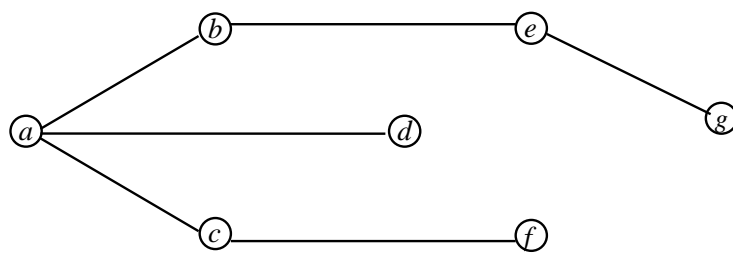


Figura S2.10 Un albero ricoprente.

Ai fini della verifica algoritmica della connessione forte del digrafo verifichiamo se esistono un'arborescenza esterna radicata in a ricoprente il digrafo e un'arborescenza interna radicata in a ricoprente il digrafo. Si può mostrare che è possibile generare un'arborescenza esterna radicata in a ricoprente il digrafo come quella riportata nella Figura S2.9 generata dalla visita (in ampiezza) del digrafo. Non è invece possibile generare un'arborescenza interna radicata in a ricoprente il digrafo. Pertanto il digrafo non è fortemente connesso.

Esercizio 2.13

La seguente tabella riporta il dettaglio dell'algoritmo di ordinamento topologico. All'interno di ogni cella della tabella è riportata la coppia ($grado_interno(i); f(i)$).

nodi	iterazioni						
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
a	2; -	1; -	0; 3				
b	2; -	1; -		0; 4			
c	0; 1						
d	3; -	2; -	1; -		0; 5		
e	1; -					0; 6	
f	1; -	0; 2					
g	3; -		2; -			1; -	0; 7

Al termine dell'algoritmo tutti i nodi risultano numerati (topologicamente) quindi il digrafo è aciclico.

Esercizio 2.14

La rete residua $R(\bar{x})$ è rappresentata in Figura S2.11.

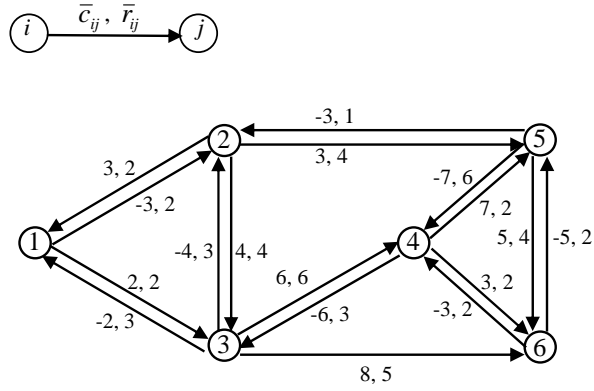


Figura S2.11 Rappresentazione della rete residua $R(\bar{x})$.

La distribuzione di flusso x' sulla rete residua $R(\bar{x})$ è rappresentata in Figura S2.12.

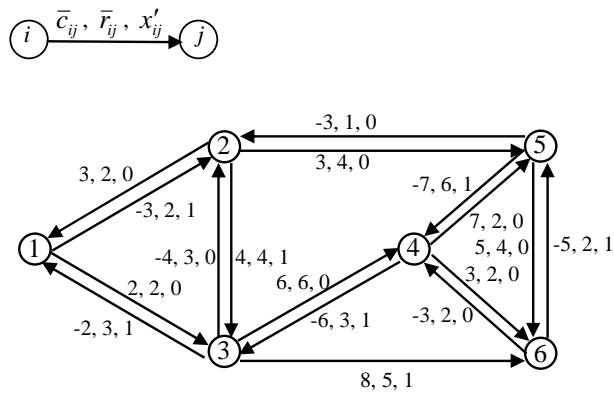


Figura S2.12 Rappresentazione della distribuzione di flusso x' sulla rete residua $R(\bar{x})$.