

Esercizi proposti nel Cap. 5 - Soluzioni

Esercizio 5.1

Sia $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ la rete in Figura 5.24. Sia $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ la distribuzione di flusso ammissibile iniziale. Il valore del flusso netto $v^{(0)}$ uscente da s è ovviamente pari a 0.

Applichiamo l'algoritmo dei cammini aumentanti sulla rete $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$, operando sulla rete residua $R(\mathbf{x}^{(0)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(0)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.1.

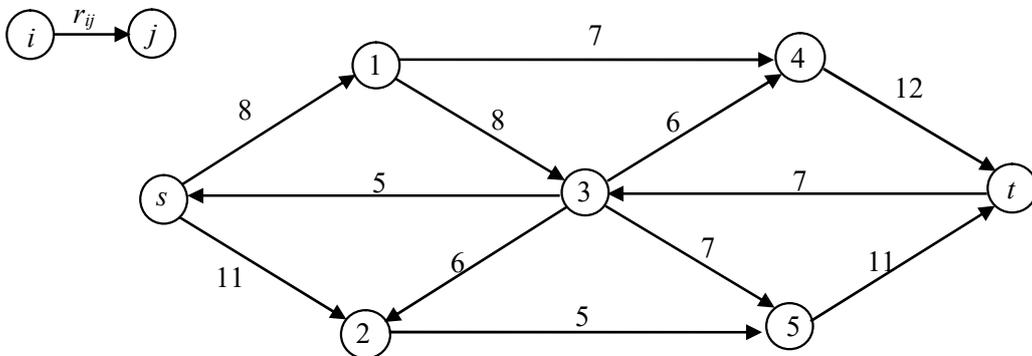


Figura S5.1. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(0)})$.

La procedura di ricerca del cammino aumentante da s a t nella rete residua $R(\mathbf{x}^{(0)})$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.2, dove δ_i rappresenta la capacità del cammino aumentante da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

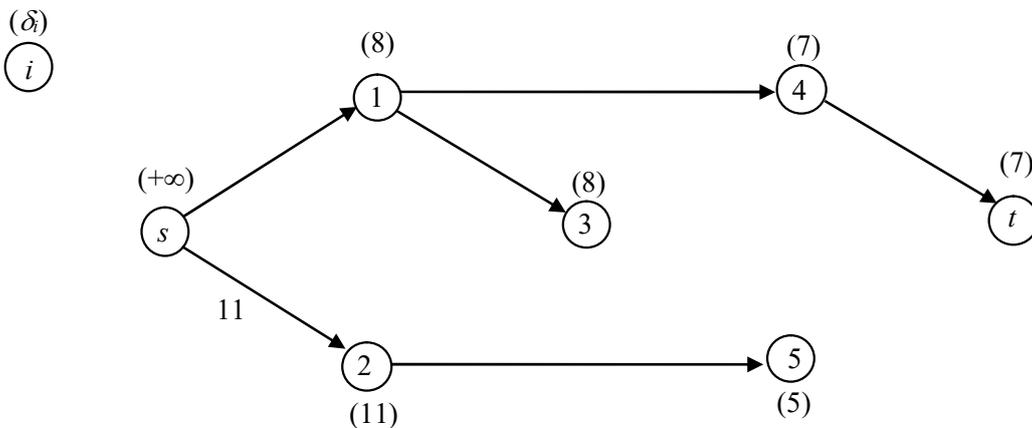


Figura S5.2. Albero di ricerca dei cammini aumentanti su $R(\mathbf{x}^{(0)})$.

La ricerca del cammino aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . Il cammino aumentante in $R(\mathbf{x}^{(0)})$ è $P_{st}^{(0)} = (s, 1, 4, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(0)} = \delta_t = 7$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^0 = 7$ unità lungo gli archi del cammino aumentante $P_{st}^{(0)}$. Sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R . Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(1)} = v^{(0)} + \delta^0 = 7$. Otteniamo la rete residua $R(\mathbf{x}^{(1)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(1)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.3.

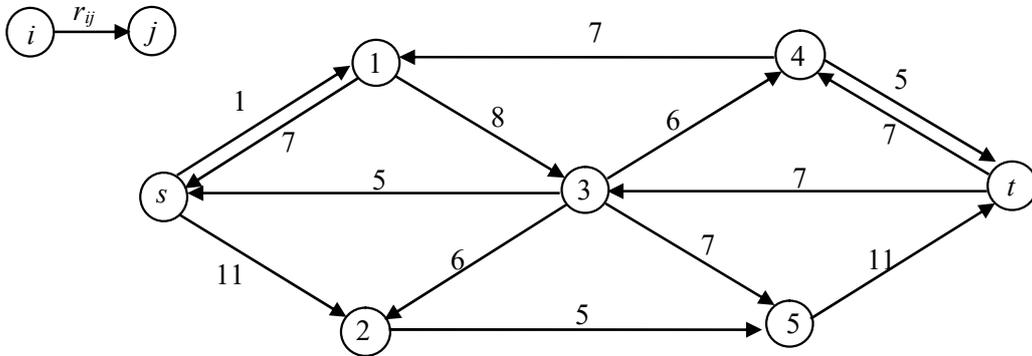


Figura S5.3. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(1)})$.

La procedura di ricerca del cammino aumentante da s a t nella rete residua $R(\mathbf{x}^{(1)})$ tramite ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.4, dove δ_i rappresenta la capacità del cammino aumentante da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

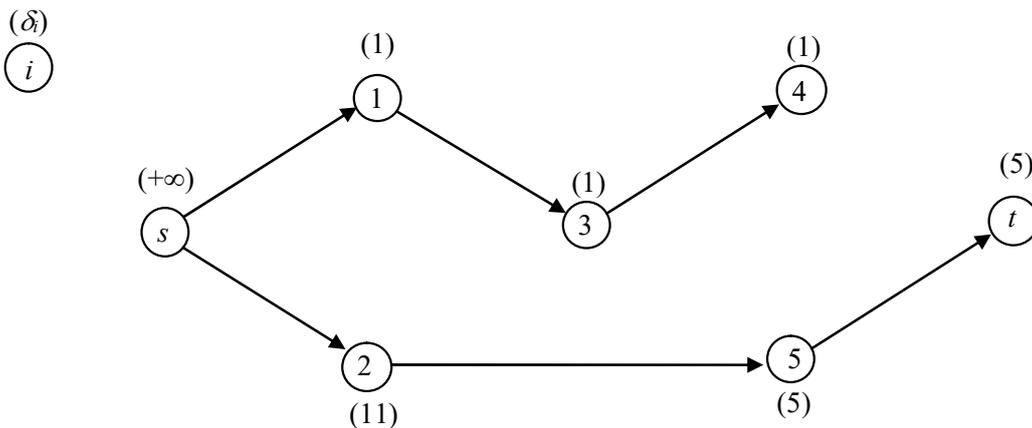


Figura S5.4. Albero di ricerca dei cammini aumentanti su $R(\mathbf{x}^{(1)})$.

La ricerca del cammino aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . Il cammino aumentante in $R(\mathbf{x}^{(1)})$ è $P_{st}^{(1)} = (s, 2, 5, t)$ e la sua capacità è $\delta^1 = \delta_t = 5$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^1 = 5$ unità lungo gli archi del cammino aumentante $P_{st}^{(1)}$. Sia $\mathbf{x}^{(2)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R . Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(2)} = v^{(1)} + \delta^1 = 12$. Otteniamo la rete residua $R(\mathbf{x}^{(2)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(2)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.5.

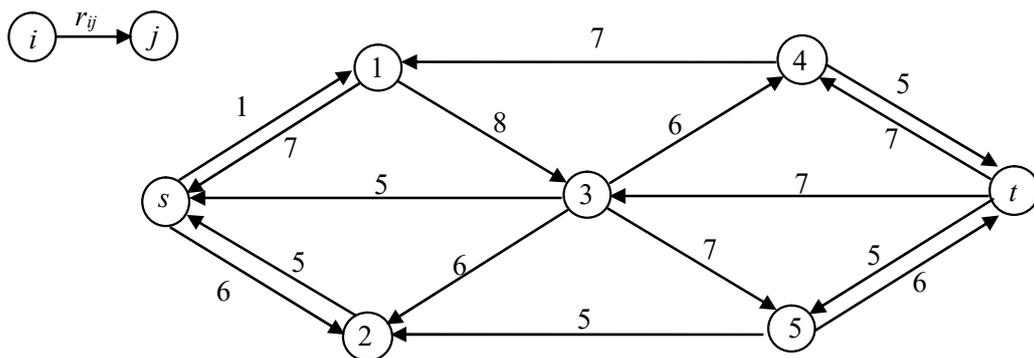


Figura S5.5. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(2)})$.

La procedura di ricerca del cammino aumentante da s a t nella rete residua $R(\mathbf{x}^{(2)})$ tramite ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.6, dove δ_i rappresenta la capacità del cammino aumentante da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

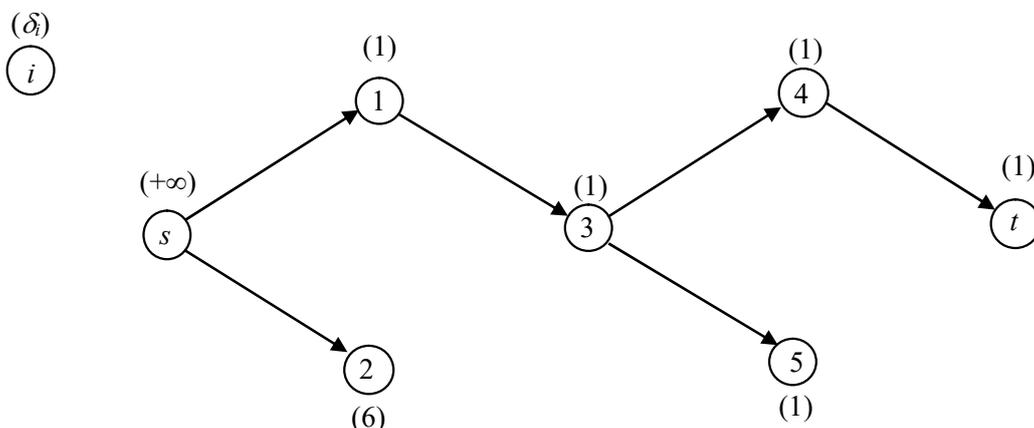


Figura S5.6. Albero di ricerca dei cammini aumentanti su $R(\mathbf{x}^{(2)})$.

La ricerca del cammino aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . Il cammino aumentante in $R(\mathbf{x}^{(2)})$ è $P_{st}^{(2)} = (s, 1, 3, 4, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(2)} = \delta_1 = 1$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(2)} = 1$ unità lungo gli archi del cammino aumentante $P_{st}^{(2)}$. Sia $\mathbf{x}^{(3)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R . Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(3)} = v^{(2)} + \delta^{(2)} = 13$. Otteniamo la rete residua $R(\mathbf{x}^{(3)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(3)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.7.

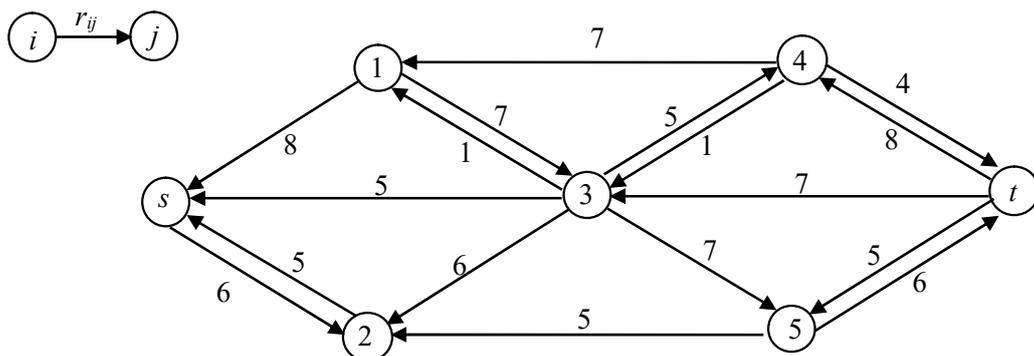


Figura S5.7. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(3)})$.

La procedura di ricerca del cammino aumentante da s a t nella rete residua $R(\mathbf{x}^{(3)})$ tramite ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.8, dove δ_i rappresenta la capacità del cammino aumentante da s al nodo i sull'albero.

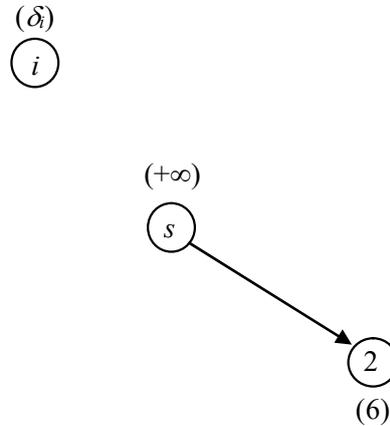


Figura S5.8. Albero di ricerca dei cammini aumentanti su $R(\mathbf{x}^{(3)})$.

La ricerca del cammino aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t .

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(3)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.9) e il valore del massimo flusso netto uscente da s è $\nu^* = \nu^{(3)} = 13$. Tale distribuzione di flusso su R è stata ottenuta a partire dalla rete residua finale $R(\mathbf{x}^{(3)})$ di Figura S5.7, ponendo $x_{ij}^{(3)} = \max\{u_{ij} - r_{ij}, 0\}$ e $x_{ji}^{(3)} = \max\{r_{ij} - u_{ij}, 0\}$, per ogni arco $(i, j) \in \mathcal{A}^{(3)}$ della rete residua $R(\mathbf{x}^{(3)})$.

Il taglio s - t di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = \{s, 2\}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{s1} + u_{25} = 13$.

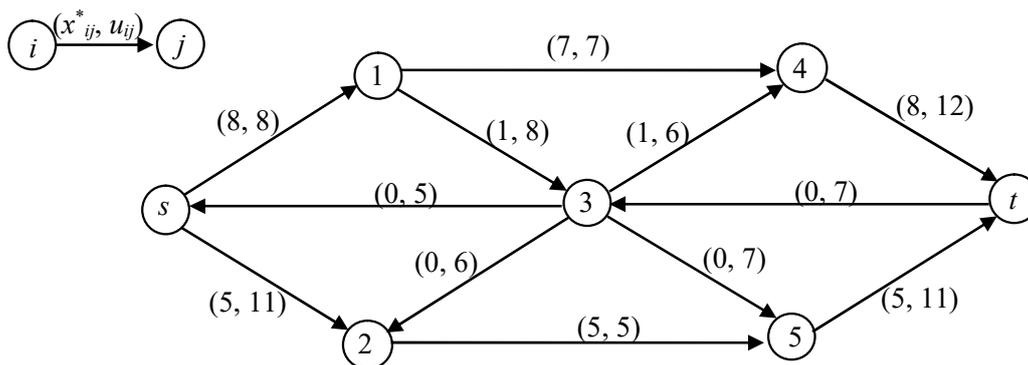


Figura S5.9. Rappresentazione della rete di flusso con il flusso ottimo \mathbf{x}^* .

Applichiamo ora l'algoritmo di Ford & Fulkerson sulla rete $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ in Figura 5.24. Sia $\mathbf{x}^{(0)}$ la distribuzione di flusso ammissibile iniziale con $x_{ij}^{(0)} = 0$, $(i, j) \in \mathcal{A}$, e $R^{(0)}$ la associata rete di flusso rappresentata in Figura S5.10. Il valore del flusso netto $\nu^{(0)}$ uscente da s è ovviamente pari a 0.

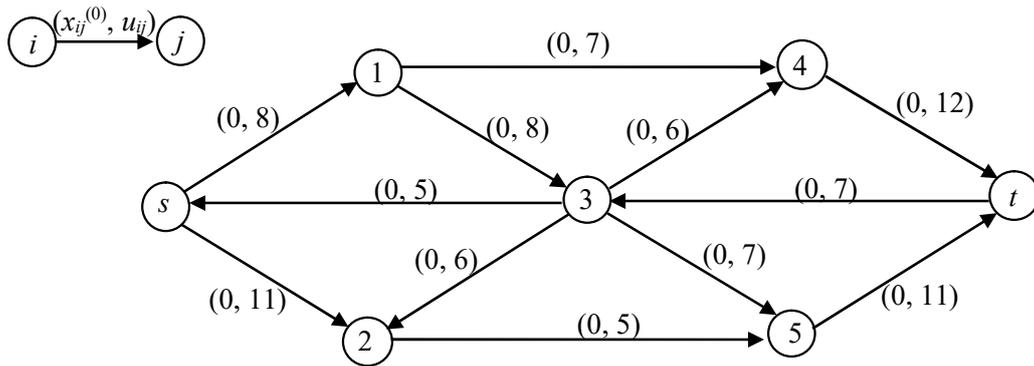


Figura S5.10. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(0)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(0)}$ tramite, ad esempio, ricerca in profondità (per differenziare il calcolo dal precedente) genera l'albero di ricerca (arborecenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.11, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

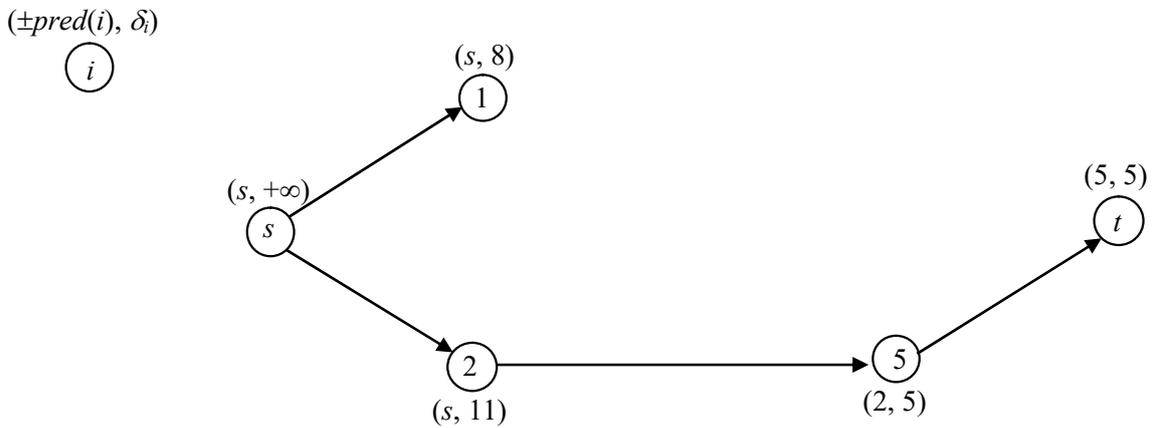


Figura S5.11. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(0)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(0)}$ è $P_{st}^{(0)} = (s, 2, 5, t)$ e la sua capacità è $\delta^0 = \delta_t = 5$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^0 = 5$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(0)}$. Sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(1)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.12. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(1)} = v^{(0)} + \delta^0 = 5$.

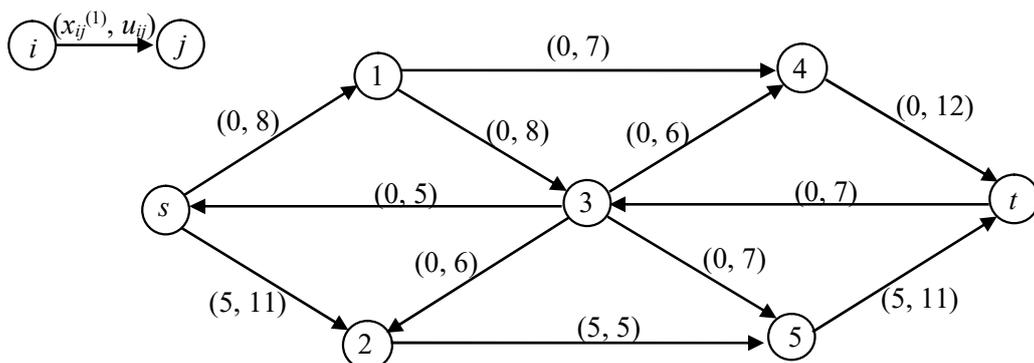


Figura S5.12. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(1)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(1)}$ tramite ricerca in profondità genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.13, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

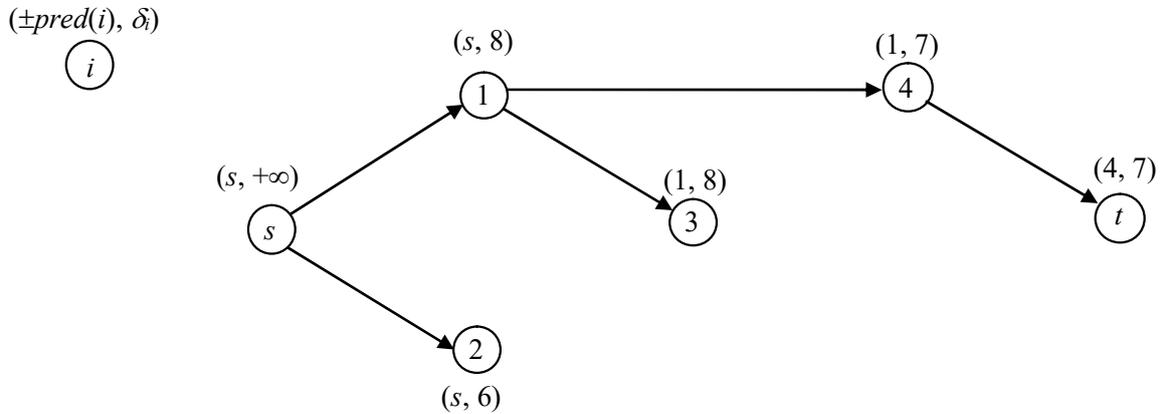


Figura S5.13. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(1)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(1)}$ è $P_{st}^{(1)} = (s, 1, 4, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(1)} = \delta_t = 7$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(1)} = 7$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(1)}$. Sia $\mathbf{x}^{(2)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(2)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.14. Il valore del flusso netto uscente da s è $\nu^{(2)} = \nu^{(1)} + \delta^{(1)} = 12$.

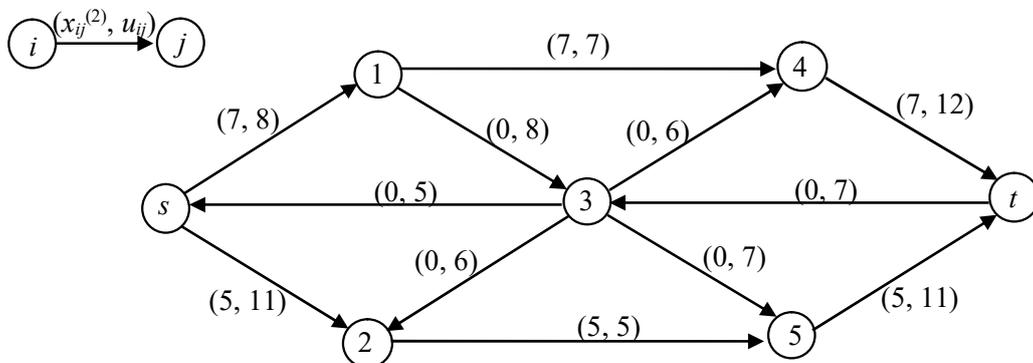


Figura S5.14. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(2)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(2)}$ tramite ricerca in profondità genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.15, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(2)}$ è $P_{st}^{(2)} = (s, 1, 3, 5, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(2)} = \delta_t = 1$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(2)} = 1$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(2)}$. Sia $\mathbf{x}^{(3)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(3)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.16. Il valore del flusso netto uscente da s è $\nu^{(3)} = \nu^{(2)} + \delta^{(2)} = 13$.

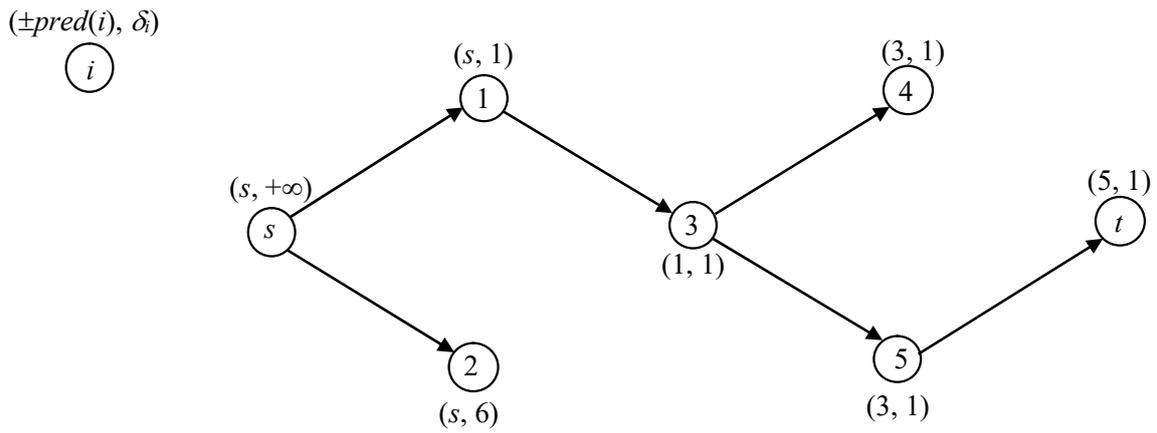


Figura S5.15. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(2)}$.

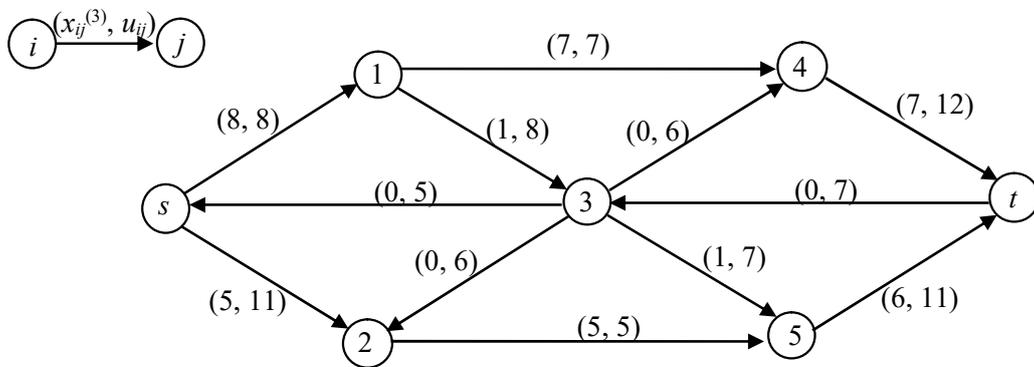


Figura S5.16. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(3)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(3)}$ tramite ricerca in profondità genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.17, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero.

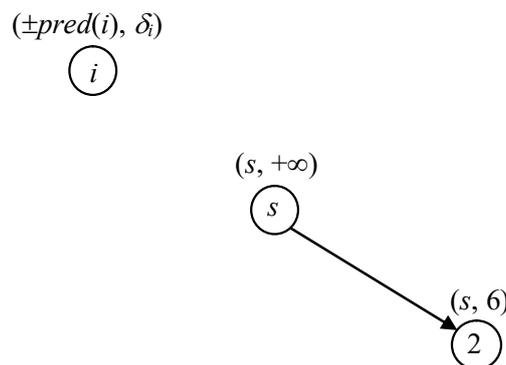


Figura S5.17. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(3)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t .

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(3)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.16) e il valore del massimo flusso netto uscente da s è $v^* = v^{(3)} = 13$.

Il taglio s - t di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = \{s, 2\}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{s1} + u_{25} = 13$.

Esercizio 5.2

Sia $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ la rete in Figura 5.25. La formulazione del problema del massimo flusso da s a t è la seguente.

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}: (s, j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, s) \in \mathcal{A}} x_{hs} &= v \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (i, j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, i) \in \mathcal{A}} x_{hi} &= 0, \quad i \in \mathcal{N} \setminus \{s, t\}, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (t, j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, t) \in \mathcal{A}} x_{ht} &= -v, \\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

cioè:

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} x_{s1} + x_{s2} &= v \\ x_{12} + x_{13} - x_{s1} &= 0 \\ x_{24} + x_{2t} - x_{s2} - x_{12} - x_{32} &= 0 \\ x_{32} + x_{3t} - x_{13} - x_{43} &= 0 \\ x_{43} + x_{4t} - x_{24} &= 0 \\ -x_{2t} - x_{3t} - x_{4t} &= -v \\ 0 \leq x_{s1} &\leq 7 \\ 0 \leq x_{s2} &\leq 3 \\ 0 \leq x_{12} &\leq 1 \\ 0 \leq x_{13} &\leq 6 \\ 0 \leq x_{24} &\leq 8 \\ 0 \leq x_{2t} &\leq 4 \\ 0 \leq x_{32} &\leq 3 \\ 0 \leq x_{3t} &\leq 2 \\ 0 \leq x_{43} &\leq 2 \\ 0 \leq x_{4t} &\leq 6. \end{aligned}$$

Sia $\mathbf{x}^{(0)}$ la data distribuzione di flusso ammissibile iniziale e sia $R^{(0)}$ la rete di flusso associata e rappresentata in Figura S5.18. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(0)} = 7$. Applichiamo l'algoritmo di Ford & Fulkerson a partire dalla rete di flusso $R^{(0)}$.

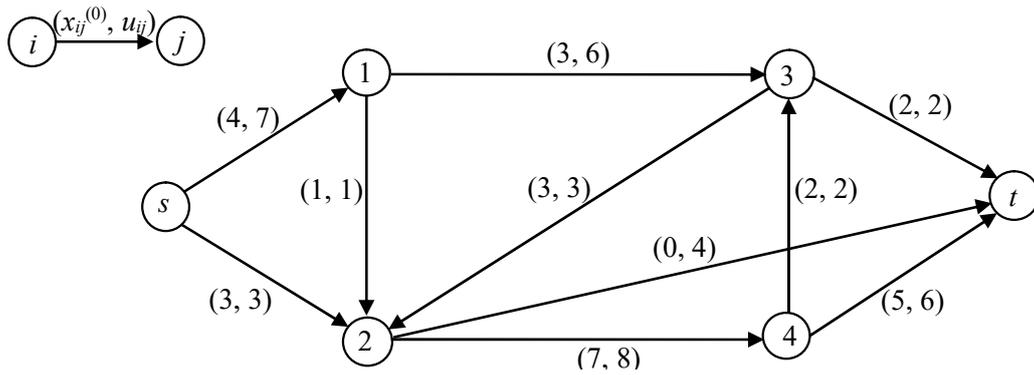


Figura S5.18. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(0)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(0)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborecenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.19, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

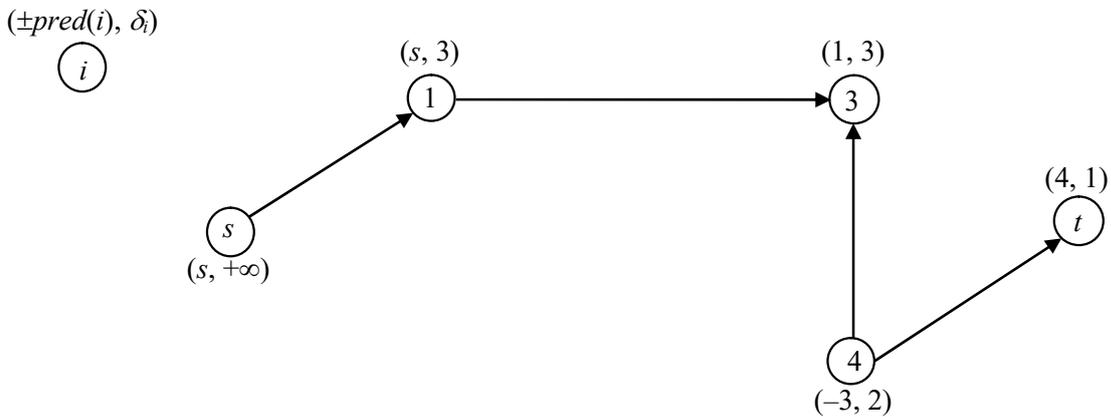


Figura S5.19. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(0)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(0)}$ è $P_{st}^{(0)} = (s, 1, 3, 4, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(0)} = \delta_t = 1$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(0)} = 1$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(0)}$. Sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(1)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.20. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(1)} = v^{(0)} + \delta^{(0)} = 8$.

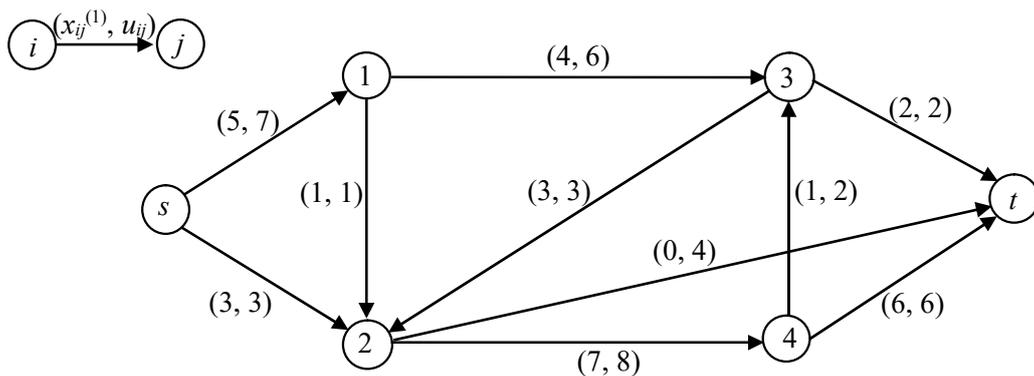


Figura S5.20. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(1)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(1)}$ tramite ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.21, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero.

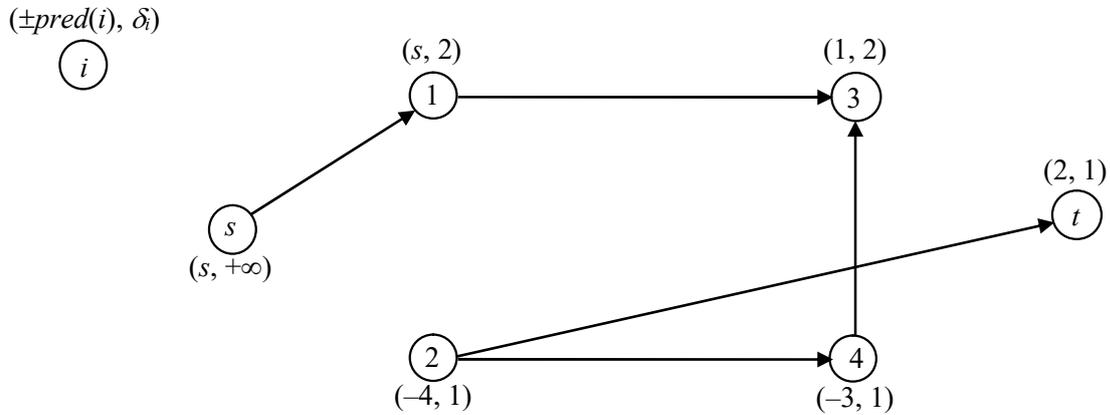


Figura S5.21. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(1)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(1)}$ è $P_{st}^{(1)} = (s, 1, 3, 4, 2, t)$ e la sua capacità è $\delta^1 = \delta_t = 1$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^1 = 1$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(1)}$. Sia $\mathbf{x}^{(2)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(2)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.22. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(2)} = v^{(1)} + \delta^1 = 9$.

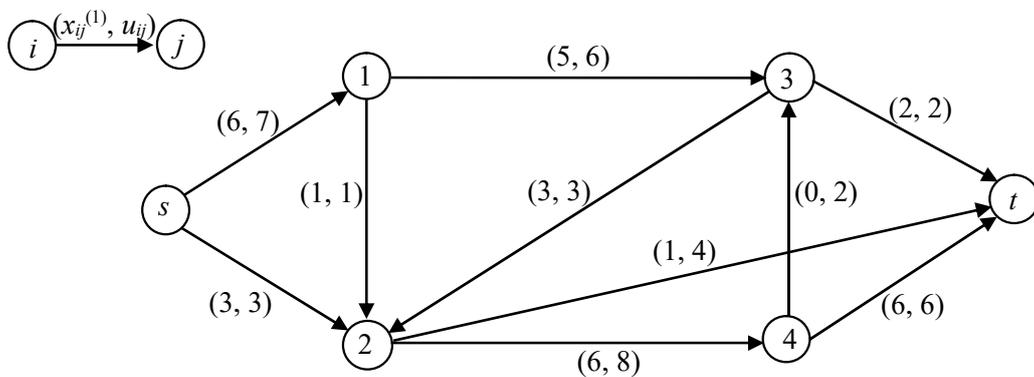


Figura S5.22. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(2)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(2)}$ tramite ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.23, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero.

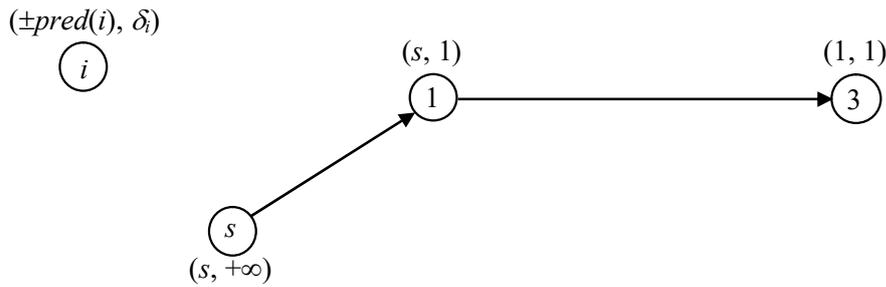


Figura S5.23. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(2)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t .

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(2)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.22) e il valore del massimo flusso netto uscente da s è $v^* = v^{(2)} = 9$.

Il taglio s - t di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = \{s, 1, 3\}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{s2} + u_{12} + u_{32} + u_{3t} = 9$.

Esercizio 5.3

Sia $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ la rete in Figura 5.26. La formulazione del problema del massimo flusso da s a t è la seguente.

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}: (s, j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, s) \in \mathcal{A}} x_{hs} &= v \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (i, j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, i) \in \mathcal{A}} x_{hi} &= 0, \quad i \in \mathcal{N} \setminus \{s, t\}, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (t, j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, t) \in \mathcal{A}} x_{ht} &= -v, \\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

cioè:

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} x_{s1} + x_{s2} &= v \\ x_{12} + x_{13} + x_{15} - x_{s1} &= 0 \\ x_{24} - x_{s2} - x_{12} - x_{52} &= 0 \\ x_{3t} - x_{13} - x_{53} &= 0 \\ x_{45} + x_{4t} - x_{24} &= 0 \\ x_{52} + x_{53} + x_{5t} - x_{15} - x_{45} &= 0 \\ -x_{3t} - x_{4t} - x_{5t} &= -v \\ 0 \leq x_{s1} &\leq 16 \\ 0 \leq x_{s2} &\leq 22 \\ 0 \leq x_{12} &\leq 9 \\ 0 \leq x_{13} &\leq 7 \\ 0 \leq x_{15} &\leq 10 \\ 0 \leq x_{24} &\leq 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq x_{3t} \leq k \\
0 &\leq x_{45} \leq 12 \\
0 &\leq x_{4t} \leq 9 \\
0 &\leq x_{52} \leq 10 \\
0 &\leq x_{53} \leq 13 \\
0 &\leq x_{5t} \leq 13.
\end{aligned}$$

Applichiamo ora l'algoritmo di Ford & Fulkerson sulla rete $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ in Figura 5.26. Sia $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ la distribuzione di flusso ammissibile iniziale e $R^{(0)}$ la associata rete di flusso rappresentata in Figura S5.24. Il valore del flusso netto $v^{(0)}$ uscente da s è ovviamente pari a 0.

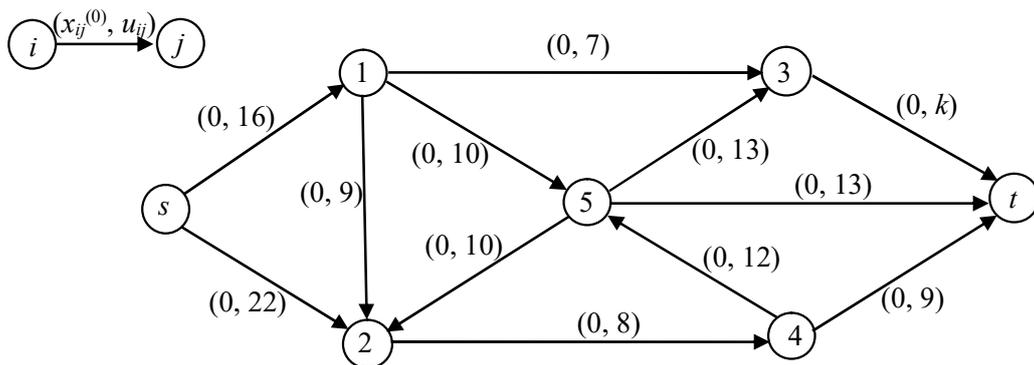


Figura S5.24. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(0)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(0)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza, evitando possibilmente di includere l'arco $(3, t)$, genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.25, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(0)}$ è $P_{st}^{(0)} = (s, 2, 4, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(0)} = \delta_t = 8$.

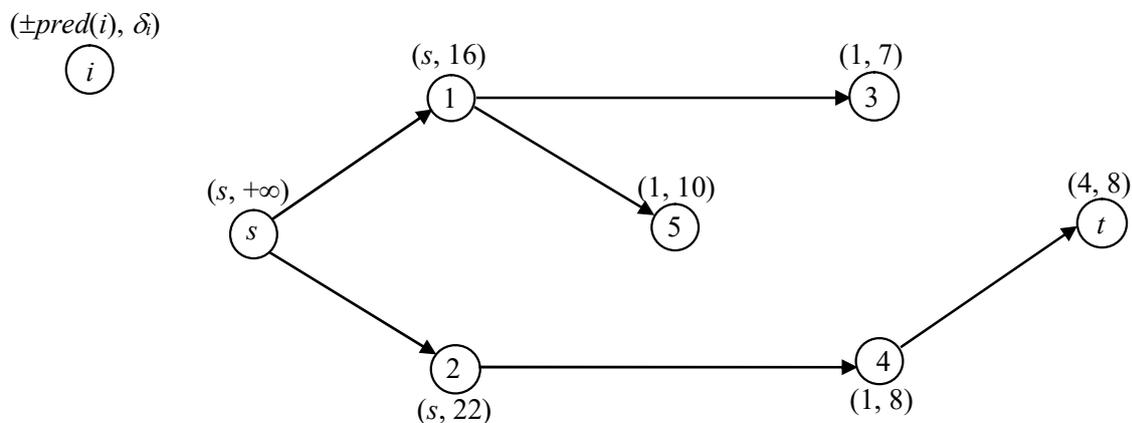


Figura S5.25. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(0)}$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(0)} = 10$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(0)}$. Sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la nuova

distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(1)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.26. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(1)} = v^{(0)} + \delta^0 = 8$.

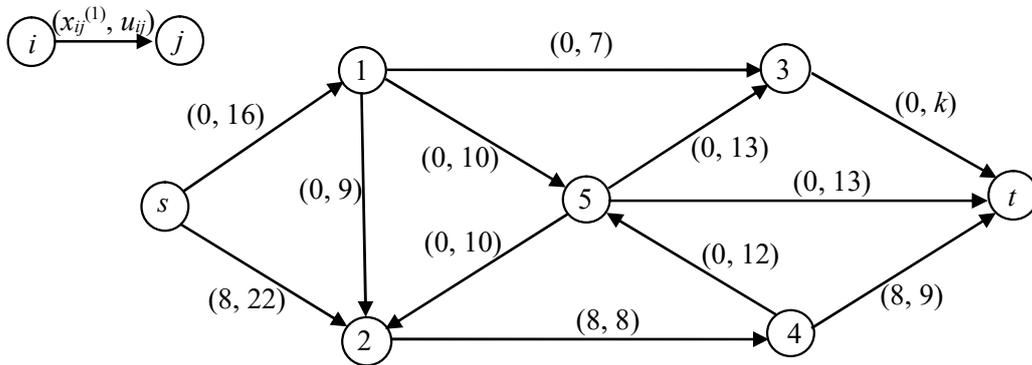


Figura S5.26. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(1)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(1)}$ tramite ricerca in ampiezza, evitando possibilmente di includere l'arco $(3, t)$, genera l'albero di ricerca (arborecenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.27, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

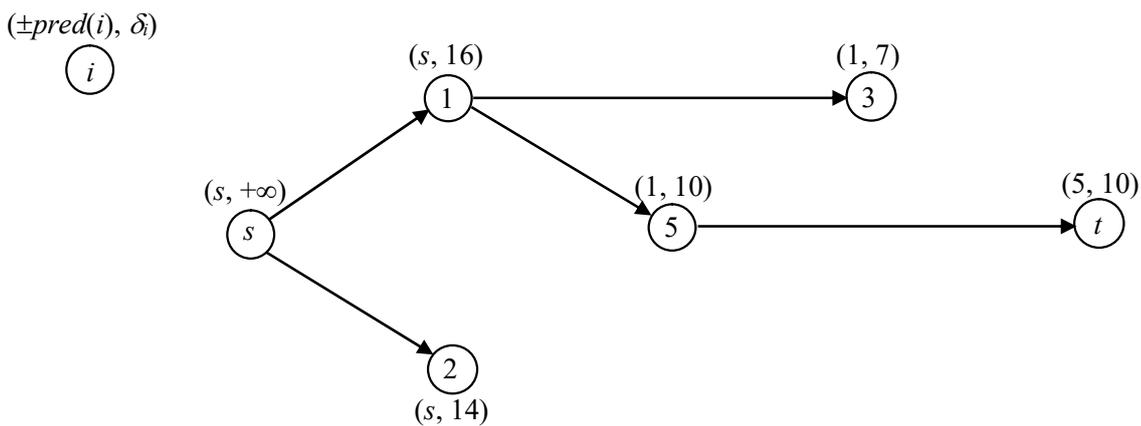


Figura S5.27. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(1)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(1)}$ è $P_{st}^{(1)} = (s, 1, 5, t)$ e la sua capacità è $\delta^1 = \delta_t = 10$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^1 = 10$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(1)}$. Sia $\mathbf{x}^{(2)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(2)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.28. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(2)} = v^{(1)} + \delta^1 = 18$.

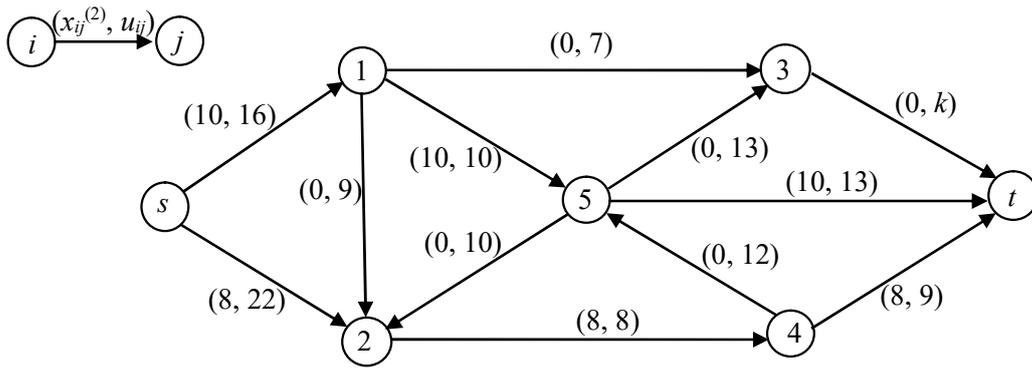


Figura S5.28. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(2)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(2)}$ tramite ricerca in ampiezza, evitando possibilmente di includere l'arco $(3, t)$, genera l'albero di ricerca (arborecenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.29, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

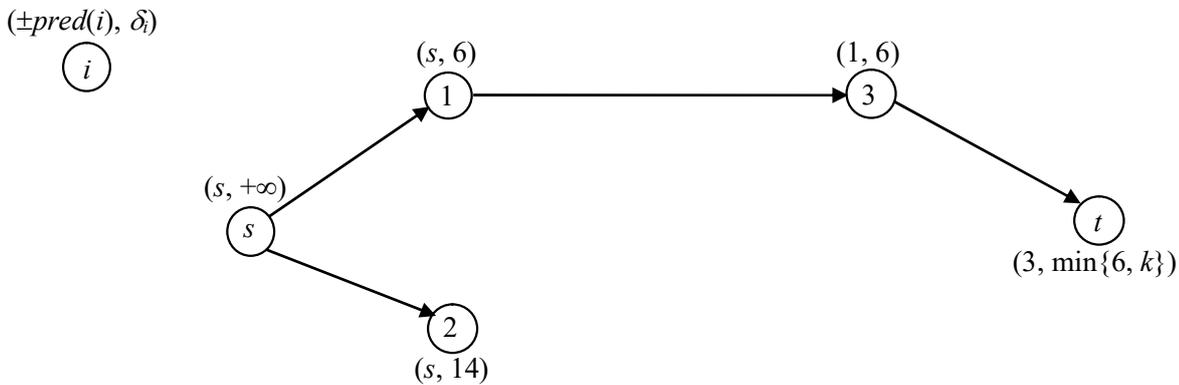


Figura S5.29. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(2)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(2)}$ è $P_{st}^{(2)} = (s, 1, 3, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(2)} = \delta_t = \min\{6, k\}$.

Proseguiamo lo studio analizzando separatamente i due casi a) $k \leq 6$, b) $k > 6$.

Caso a) $k \leq 6$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(2)} = \min\{6, k\} = k \leq 6$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(2)}$. Sia $\mathbf{x}^{(3a)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(3a)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.30. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(3a)} = v^{(2)} + \delta^{(2)} = 18 + k$.

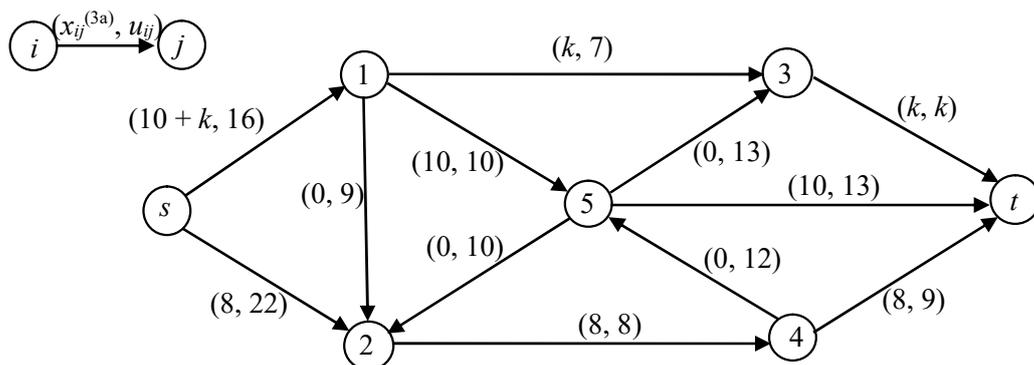


Figura S5.30. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(3a)}$, ($k \leq 6$).

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(3a)}$ tramite ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.31, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero.

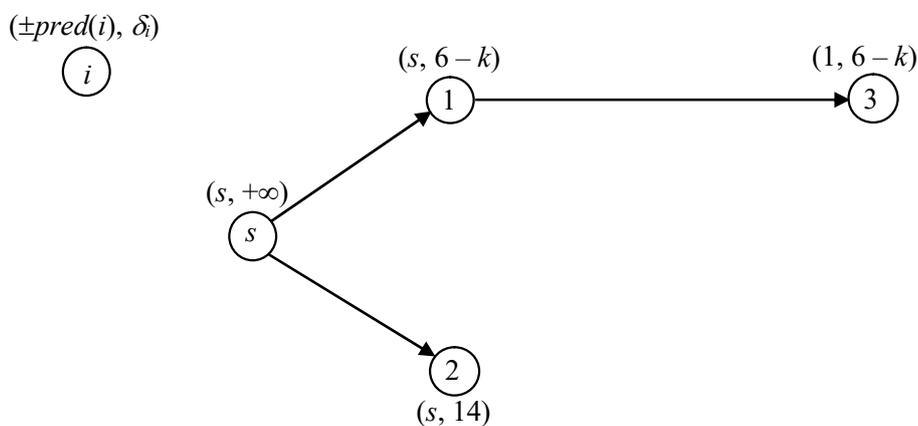


Figura S5.31. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(3a)}$, ($k \leq 6$).

La ricerca della catena aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t .

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(3a)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.30) e il valore del massimo flusso netto uscente da s è $v^* = v^{(3a)} = 18 + k$, assumendo $k \leq 6$.

Il taglio s - t di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = \{s, 1, 2, 3\}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{15} + u_{24} + u_{3t} = 18 + k$.

Caso b) $k > 6$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(2)} = \min\{6, k\} = 6$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(2)}$. Sia $\mathbf{x}^{(3b)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(3b)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.32. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(3b)} = v^{(2)} + \delta^{(2)} = 24$.

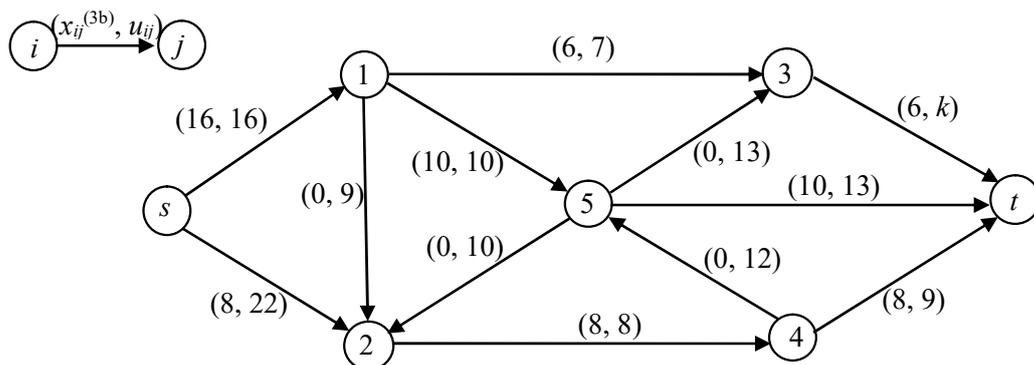


Figura S5.32. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(3b)}$, ($k > 6$).

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(3b)}$ tramite ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.33, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero.

La ricerca della catena aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t .

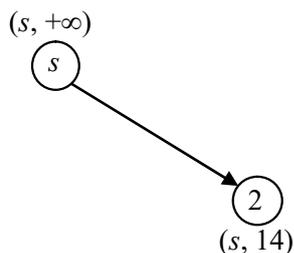
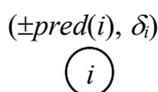


Figura S5.33. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(3b)}$, ($k > 6$).

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(3b)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.32) e il valore del massimo flusso netto uscente da s è $v^* = v^{(3b)} = 24$, assumendo $k > 6$.

Il taglio s - t di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = \{s, 2\}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{s1} + u_{24} = 24$.

Esercizio 5.4

Il modello di ottimizzazione del problema applicativo è quello del problema del massimo flusso sulla rete $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ rappresentata in Figura S5.34, dove \mathcal{N} è l'insieme delle 5 località di interesse, \mathcal{A} è l'insieme dei collegamenti aerei tra coppie di località e \mathbf{u} il vettore delle capacità corrispondente al massimo numero di voli giornalieri dei collegamenti aerei, desunti dalla Tabella 5.1. In particolare, il massimo flusso va calcolato dalla località Londra alla località Napoli.

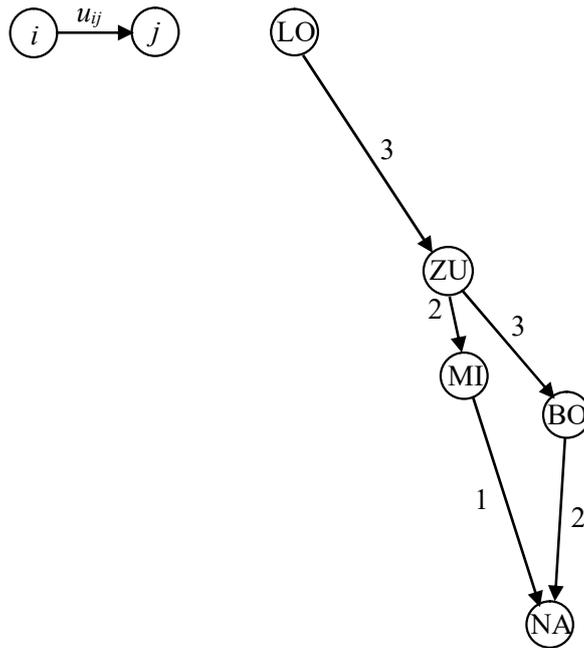


Figura S5.34. Rappresentazione della rete R .

La formulazione del problema del massimo flusso dal nodo “LO” (Londra) al nodo “NA” (Napoli) è quella appresso riportata, dove la variabile x_{ij} rappresenta i voli giornalieri da attivare per il collegamento dalla località i alla località j e la variabile v , da massimizzare, i voli attivabili da Londra a Napoli.

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} x_{LO,ZU} &= v \\ x_{ZU,MI} + x_{ZU,BO} - x_{LO,ZU} &= 0 \\ x_{MI,NA} - x_{ZU,MI} &= 0 \\ x_{BO,NA} - x_{ZU,BO} &= 0 \\ -x_{BO,NA} - x_{MI,NA} &= -v \\ 0 \leq x_{LO,ZU} &\leq 3 \\ 0 \leq x_{ZU,MI} &\leq 2 \\ 0 \leq x_{ZU,BO} &\leq 3 \\ 0 \leq x_{MI,NA} &\leq 1 \\ 0 \leq x_{BO,NA} &\leq 2. \end{aligned}$$

Applichiamo ora l’algoritmo di Ford & Fulkerson sulla rete $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ in Figura 5.32. Sia $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ la distribuzione di flusso ammissibile iniziale e $R^{(0)}$ la associata rete di flusso rappresentata in Figura S5.35. Il valore del flusso netto $v^{(0)}$ uscente da s è ovviamente pari a 0.

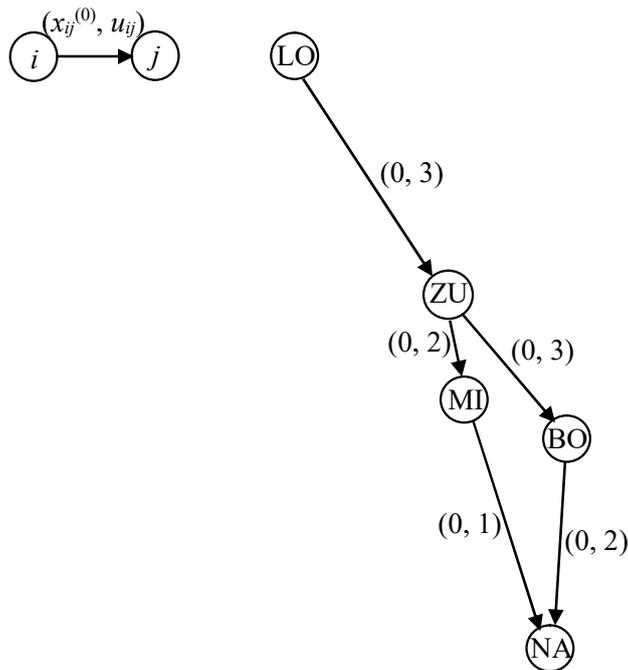


Figura S5.35. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(0)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante dal nodo “LO” al nodo “NA” nella rete di flusso $R^{(0)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l’albero di ricerca (arborescenza esterna radicata nel nodo sorgente “LO”) riportato in Figura S5.36, dove δ_i rappresenta la capacità della catena dal nodo “LO” al nodo i sull’albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo “NA”.

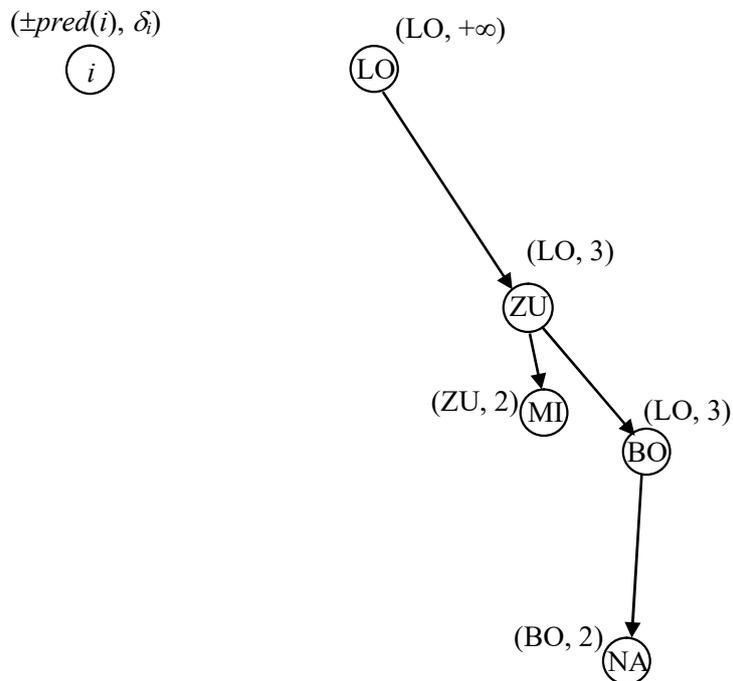


Figura S5.36. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(0)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo “NA”. La catena aumentante in $R^{(0)}$ è $P_{LO,NA}^{(0)} = (“LO”, “ZU”, “BO”, “NA”)$ e la sua capacità è $\delta^0 = \delta_{NA} = 2$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^0 = 2$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{LO,NA}^{(0)}$. Sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(1)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.37. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(1)} = v^{(0)} + \delta^1 = 2$.

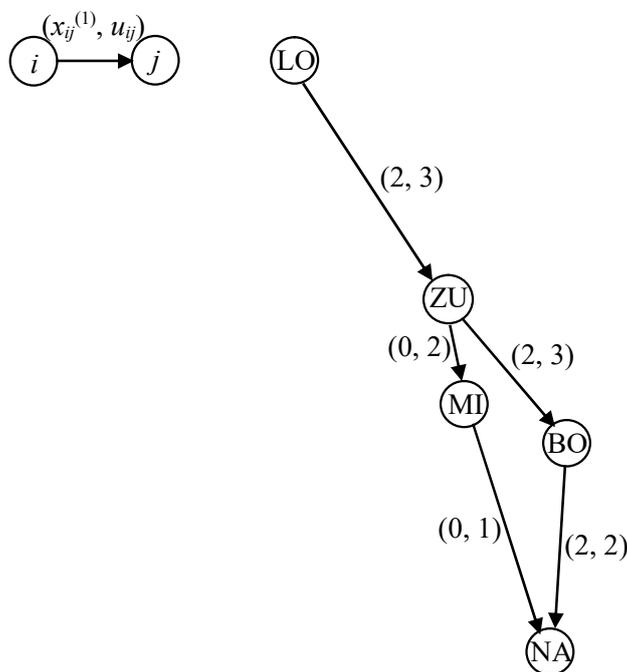


Figura S5.37. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(1)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante dal nodo “LO” al nodo “NA” nella rete di flusso $R^{(1)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l’albero di ricerca (arborecenza esterna radicata nel nodo sorgente “LO”) riportato in Figura S5.38, dove δ_i rappresenta la capacità della catena dal nodo “LO” al nodo i sull’albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo “NA”.

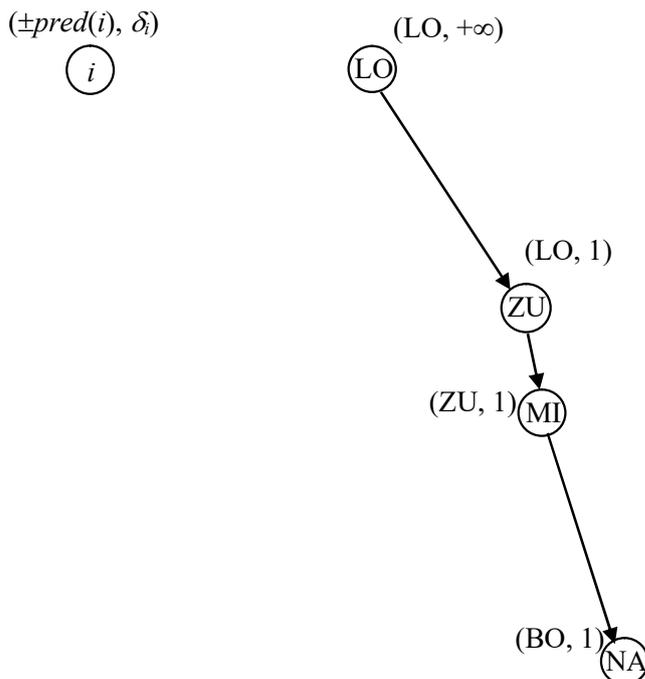


Figura S5.38. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(1)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo “NA”. La catena aumentante in $R^{(1)}$ è $P^{(1)}_{LO,NA} = (“LO”, “ZU”, “MI”, “NA”)$ e la sua capacità è $\delta^{(1)} = \delta_{NA} = 1$.

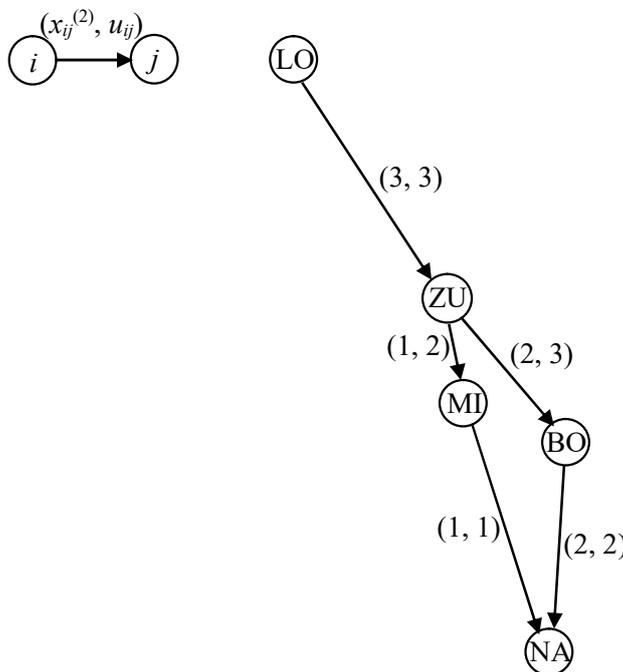


Figura S5.39. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(2)}$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(1)} = 1$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P^{(1)}_{LO,NA}$. Sia $\mathbf{x}^{(2)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(2)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.39. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(2)} = v^{(1)} + \delta^{(1)} = 3$.

La procedura di ricerca della catena aumentante dal nodo “LO” al nodo “NA” nella rete di flusso $R^{(2)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l’albero di ricerca (arborescenza esterna radicata nel nodo sorgente “LO”) riportato in Figura S5.40, dove δ_i rappresenta la capacità della catena dal nodo “LO” al nodo i sull’albero.



Figura S5.40. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(2)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo pozzo “NA”.

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(2)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.39) e il valore del massimo flusso netto uscente dal nodo sorgente “LO” è $v^* = v^{(2)} = 3$.

Il taglio separatore di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = {"LO"}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{LO,ZU} = 3$.

Il valore $v^* = 3$ del massimo flusso rappresenta quindi il numero di voli giornalieri attivabili da Londra a

Napoli. Assumendo i collegamenti bidirezionali, ovviamente si può considerare la rete orientando gli archi nella direzione opposta al fine di valutare il numero dei voli giornalieri attivabili da Napoli a Londra, che ovviamente saranno sempre pari a 3. Si lascia al lettore eseguire il dettaglio di tale studio.

Esercizio 5.5

Sia $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ la rete in Figura 5.27. La formulazione del problema del massimo flusso da s a t è la seguente.

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}: (s, j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, s) \in \mathcal{A}} x_{hs} &= v \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (i, j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, i) \in \mathcal{A}} x_{hi} &= 0, \quad i \in \mathcal{N} \setminus \{s, t\}, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (t, j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, t) \in \mathcal{A}} x_{ht} &= -v, \\ 0 \leq x_{ij} &\leq u_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

cioè:

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} x_{s1} + x_{s2} &= v \\ x_{12} - x_{s1} - x_{31} &= 0 \\ x_{24} - x_{s2} - x_{12} &= 0 \\ x_{3s} + x_{31} + x_{3t} - x_{43} &= 0 \\ x_{43} + x_{4t} - x_{24} &= 0 \\ -x_{3t} - x_{4t} &= -v \\ 0 \leq x_{s1} &\leq 7 \\ 0 \leq x_{s2} &\leq 9 \\ 0 \leq x_{12} &\leq 9 \\ 0 \leq x_{24} &\leq 13 \\ 0 \leq x_{3s} &\leq 7 \\ 0 \leq x_{31} &\leq 6 \\ 0 \leq x_{3t} &\leq 6 \\ 0 \leq x_{43} &\leq 10 \\ 0 \leq x_{4t} &\leq 5. \end{aligned}$$

Sia $\mathbf{x}^{(0)}$ la data distribuzione di flusso ammissibile iniziale e sia $R^{(0)}$ la rete di flusso associata e rappresentata in Figura 5.27. Il valore del flusso netto $v^{(0)}$ uscente da s è pari a 2.

Costruiamo la rete residua $R(\mathbf{x}^{(0)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(0)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.41.

Come richiesto dal testo dell'esercizio, applichiamo ora l'algoritmo di Ford & Fulkerson, verificando che ad ogni iterazione k la catena aumentante $P_{st}^{(k)}$ individuata nella rete di flusso $R^{(k)}$ dal nodo s al nodo t corrisponde ad un cammino (orientato) aumentante sulla rete residua $R(\mathbf{x}^{(k)})$.

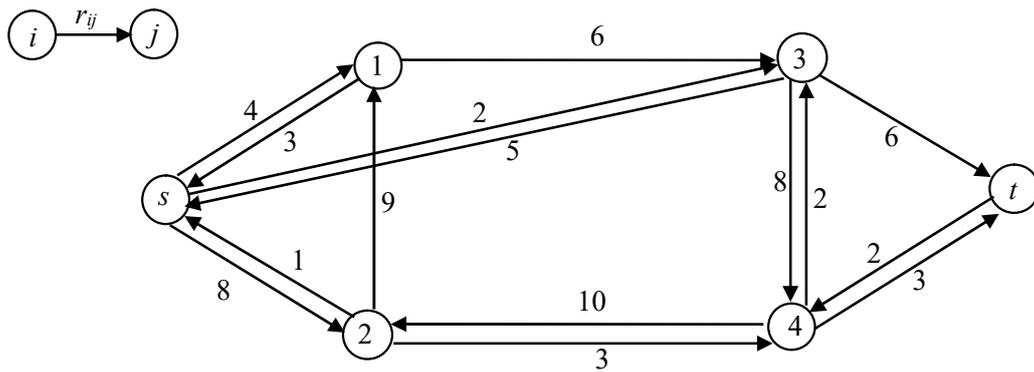


Figura S5.41. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(0)})$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(0)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.42, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(0)}$ è $P_{st}^{(0)} = (s, 3, t)$ e la sua capacità è $\delta^0 = \delta_t = 2$; si noti che l'arco $(3, s)$ della rete è percorso in senso opposto. Questa catena corrisponde al cammino (orientato nel verso concorde degli archi) aumentante $(s, 3, t)$ di capacità 2 sulla rete residua $R(\mathbf{x}^{(0)})$ riportata in Figura S5.41.

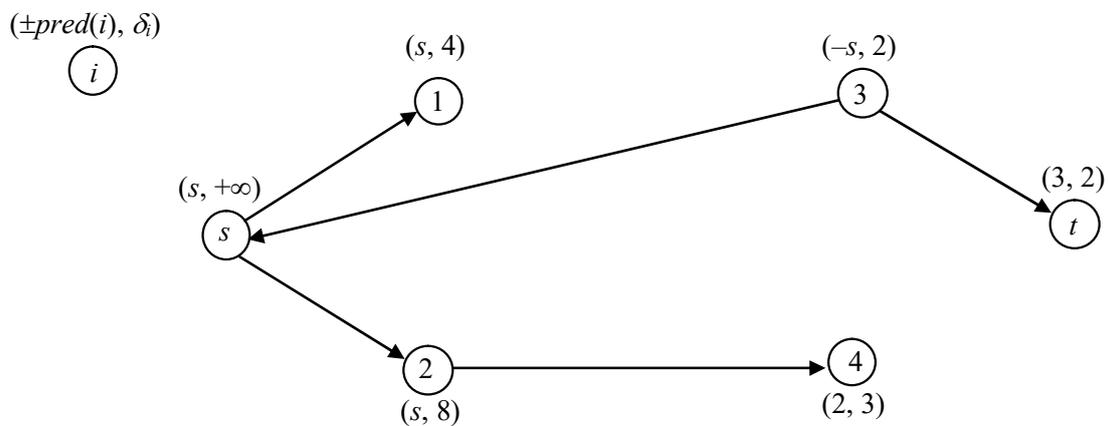


Figura S5.42. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(0)}$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^0 = 2$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(0)}$. Sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(1)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.43. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(1)} = v^{(0)} + \delta^0 = 4$.

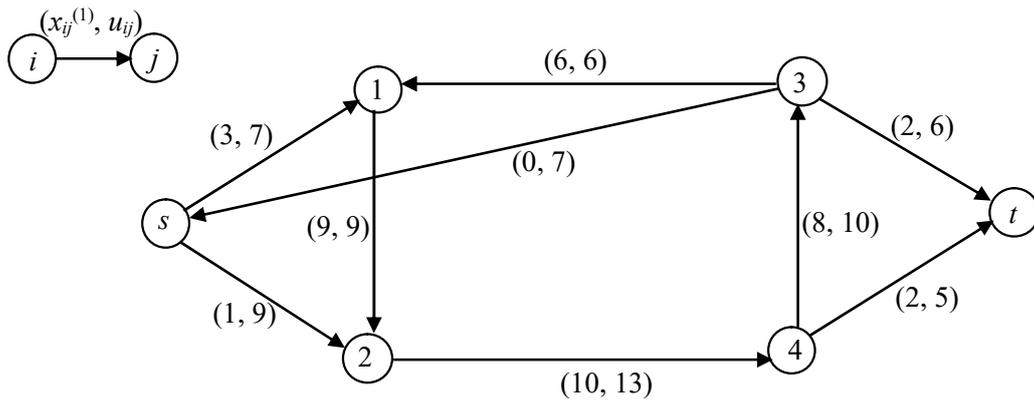


Figura S5.43. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(1)}$.

La rete residua $R(\mathbf{x}^{(1)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(1)}, \mathbf{r})$ è riportata in Figura S5.44.

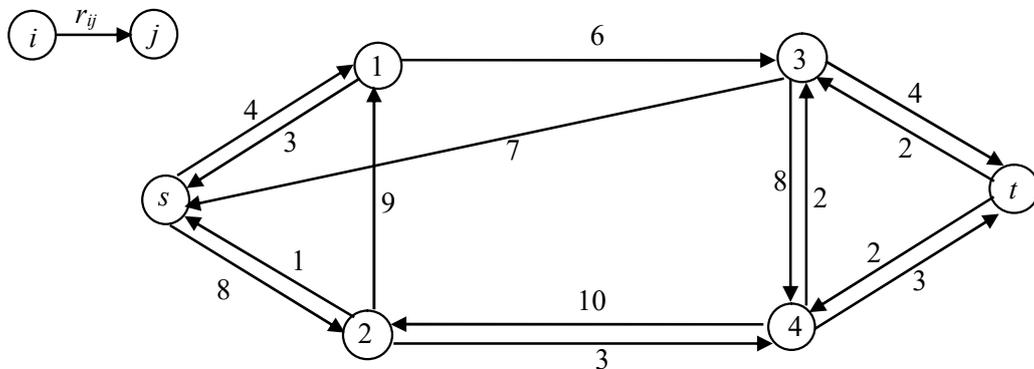


Figura S5.44. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(1)})$.

Proseguiamo con l'algoritmo di Ford & Fulkerson. La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(1)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborecenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.45, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

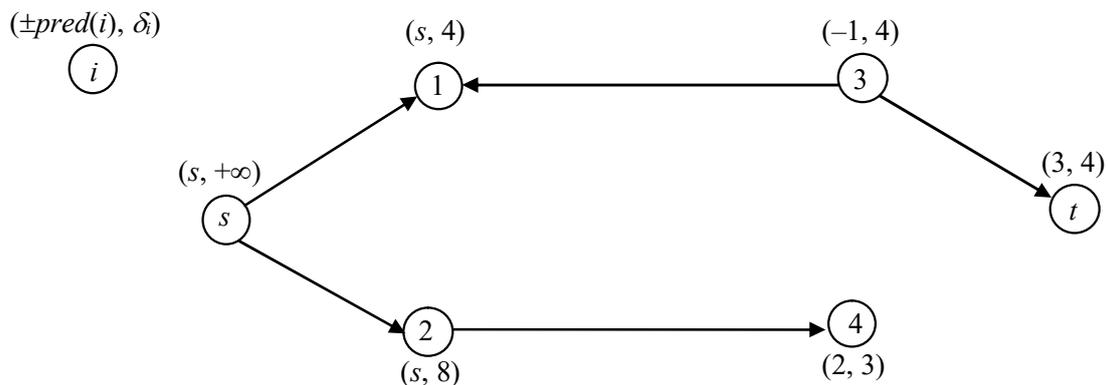


Figura S5.45. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(1)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(1)}$ è $P_{st}^{(1)} = (s, 1, 3, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(1)} = \delta_t = 4$; si noti che l'arco $(3, 1)$ della rete è percorso in senso opposto. Questa catena corrisponde al cammino (orientato nel verso concorde degli archi) aumentante $(s, 1, 3, t)$ di capacità 4 sulla rete residua $R(\mathbf{x}^{(1)})$ riportata in Figura S5.44.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^1 = 4$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(1)}$. Sia $\mathbf{x}^{(2)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(2)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.46. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(2)} = v^{(1)} + \delta^1 = 8$.

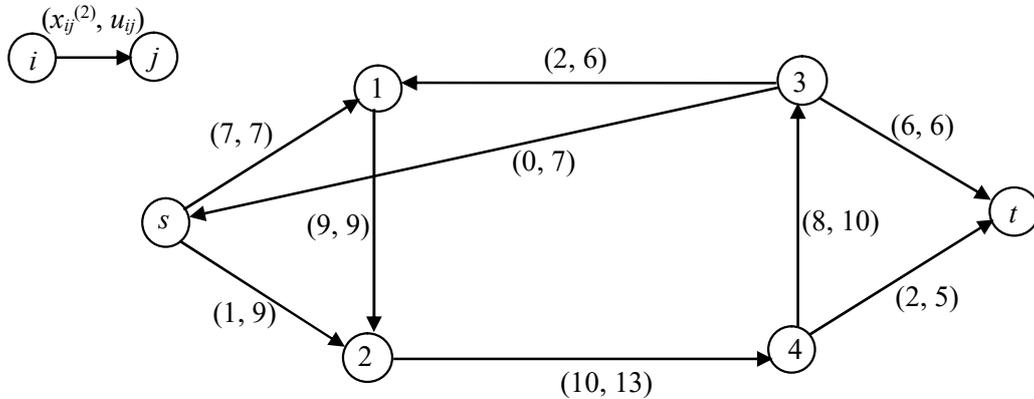


Figura S5.46. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(2)}$.

La rete residua $R(\mathbf{x}^{(2)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(2)}, \mathbf{r})$ è riportata in Figura S5.47.

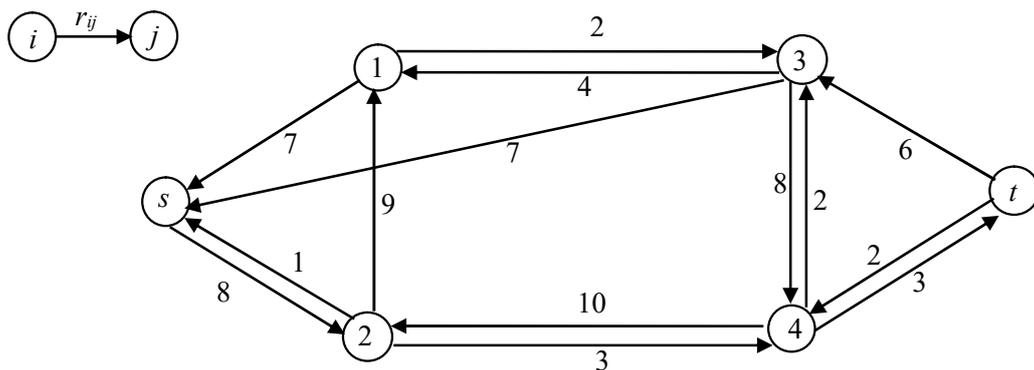


Figura S5.47. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(2)})$.

Proseguiamo con l'algoritmo di Ford & Fulkerson. La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(2)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.48, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

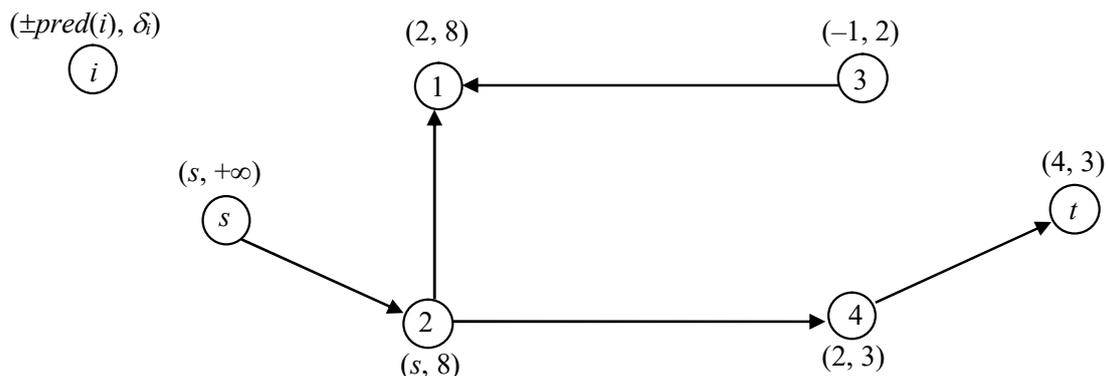


Figura S5.48. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(2)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(2)}$ è $P_{st}^{(2)} = (s, 2, 4, t)$ e la sua capacità è $\delta^2 = \delta_t = 3$. Questa catena corrisponde al cammino (orientato nel verso concorde degli archi) aumentante $(s, 2, 4, t)$ di capacità 3 sulla rete residua $R(\mathbf{x}^{(2)})$ riportata in Figura S5.47.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^1 = 4$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(2)}$. Sia $\mathbf{x}^{(3)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(3)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.49. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(3)} = v^{(2)} + \delta^2 = 11$.

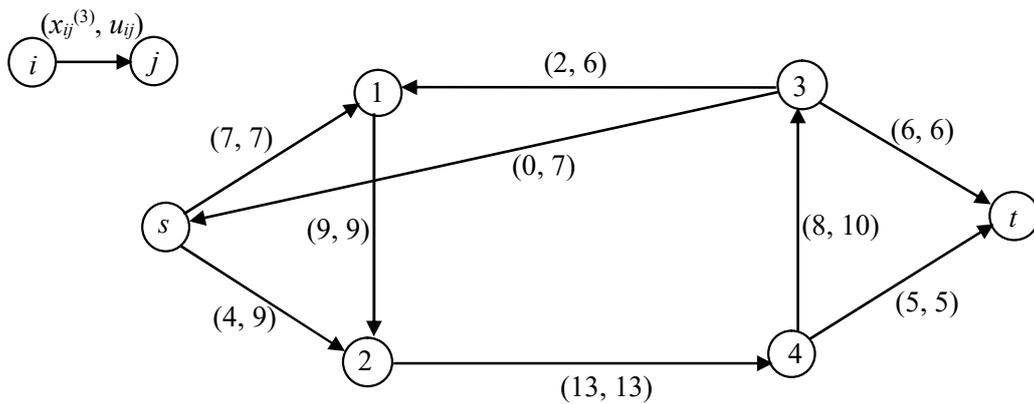


Figura S5.49. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(3)}$.

La rete residua $R(\mathbf{x}^{(3)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(3)}, \mathbf{r})$ è riportata in Figura S5.50.

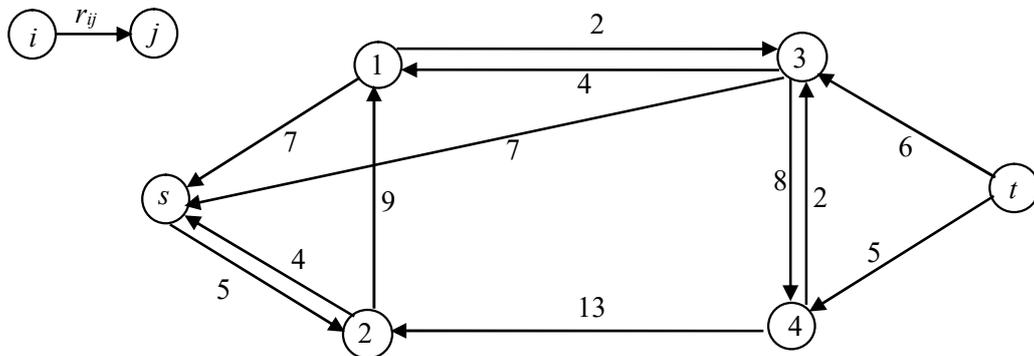


Figura S5.50. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(3)})$.

Proseguiamo con l'algoritmo di Ford & Fulkerson. La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(3)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.51, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero.

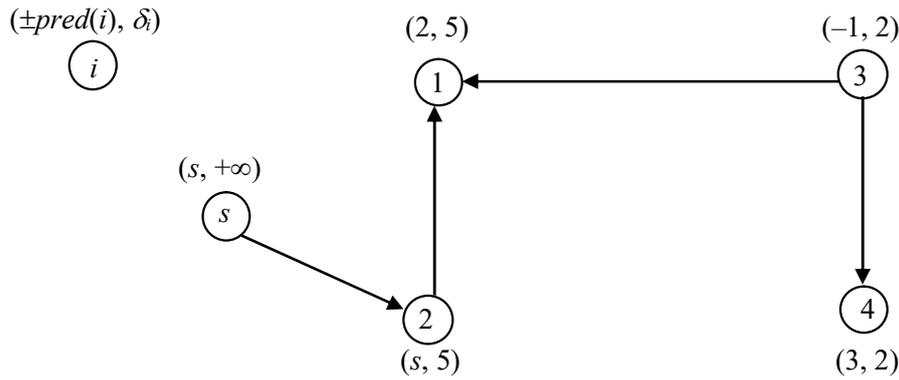


Figura S5.51. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(3)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t . Si noti che anche la ricerca del cammino (orientato) aumentante sulla rete residua $R(\mathbf{x}^{(3)})$ riportata in Figura S5.50 ha termine senza etichettare il nodo t .

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(3)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.49) e il valore del massimo flusso netto uscente da s è $v^* = v^{(3)} = 11$.

Il taglio s - t di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = \{s, 1, 2, 3, 4\}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{3t} + u_{4t} = 11$.

Esercizio 5.6

Sia $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ la rete in Figura 5.28. Al fine di determinare il flusso massimo totale dalle due sorgenti s_1 e s_2 al pozzo t , consideriamo la rete $R' = (\mathcal{N}', \mathcal{A}', \mathbf{u}')$, ottenuta aggiungendo a R il nodo s e gli archi (s, s_1) e (s, s_2) di capacità illimitata, e calcoliamo il massimo flusso su R' dal nodo (sorgente) s al nodo t .

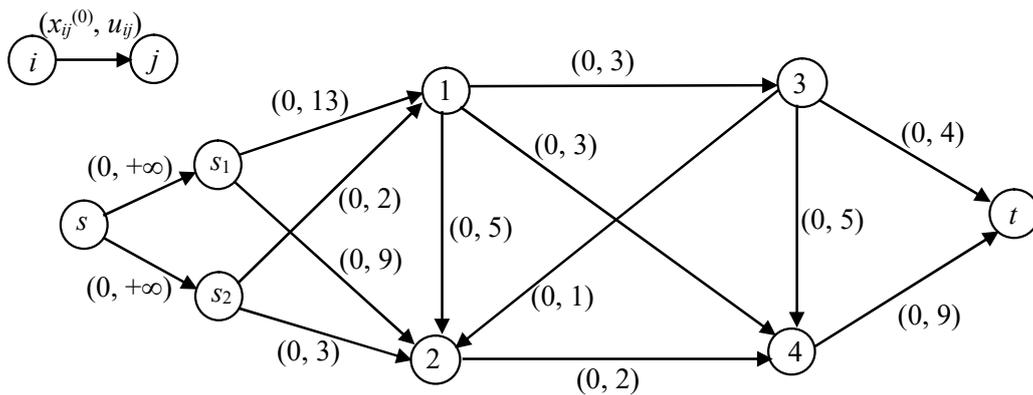


Figura S5.52. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(0)}$.

Applichiamo l'algoritmo di Ford & Fulkerson sulla rete R' . Sia $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ la distribuzione di flusso ammissibile iniziale e $R^{(0)}$ la associata rete di flusso rappresentata in Figura S5.52. Il valore del flusso netto $v^{(0)}$ uscente da s è ovviamente pari a 0.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(0)}$ tramite, ad esempio, ricerca

in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.53, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

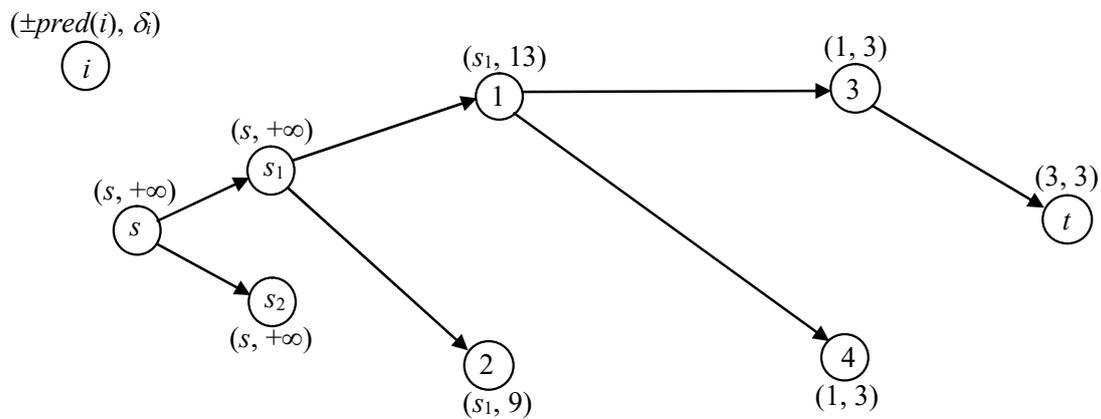


Figura S5.53. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(0)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(0)}$ è $P_{st}^{(0)} = (s, s_1, 1, 3, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(0)} = \delta_t = 3$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(0)} = 3$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(0)}$. Sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R' e sia $R^{(1)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.54. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(1)} = v^{(0)} + \delta^{(0)} = 3$.

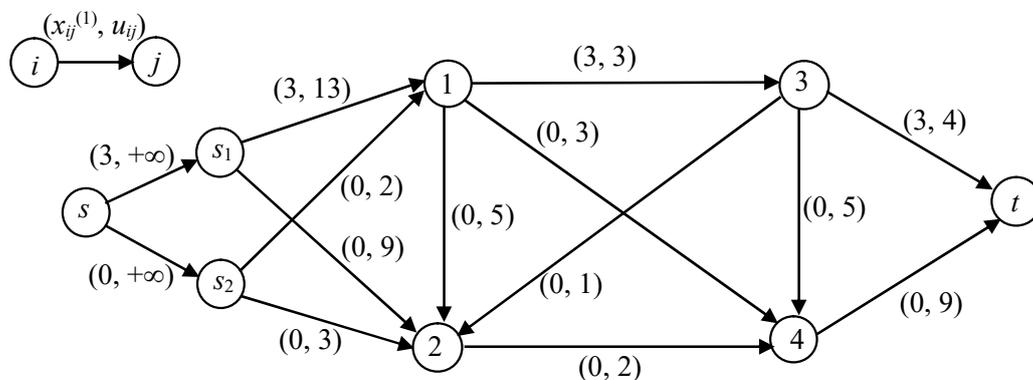


Figura S5.54. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(1)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(1)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.55, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(1)}$ è $P_{st}^{(1)} = (s, s_1, 1, 4, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(1)} = \delta_t = 3$.

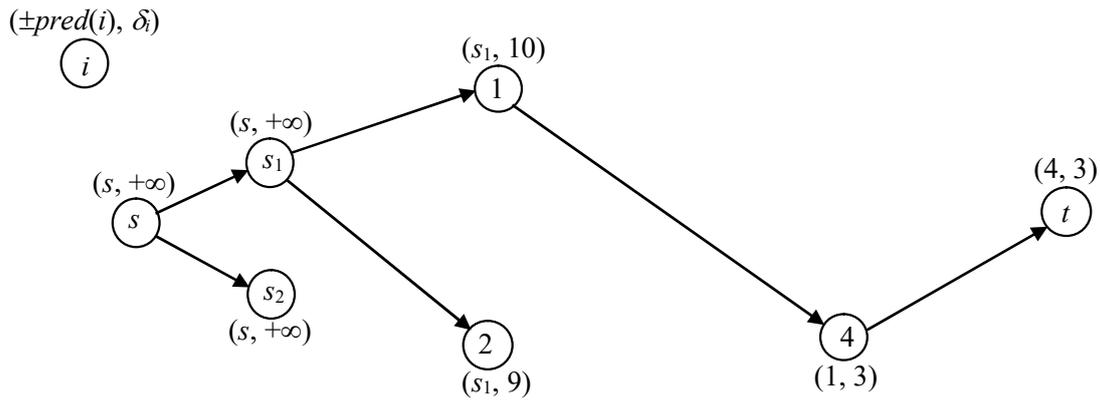


Figura S5.55. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(1)}$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^1 = 3$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(1)}$. Sia $\mathbf{x}^{(2)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R' e sia $R^{(2)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.56. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(2)} = v^{(1)} + \delta^1 = 6$.

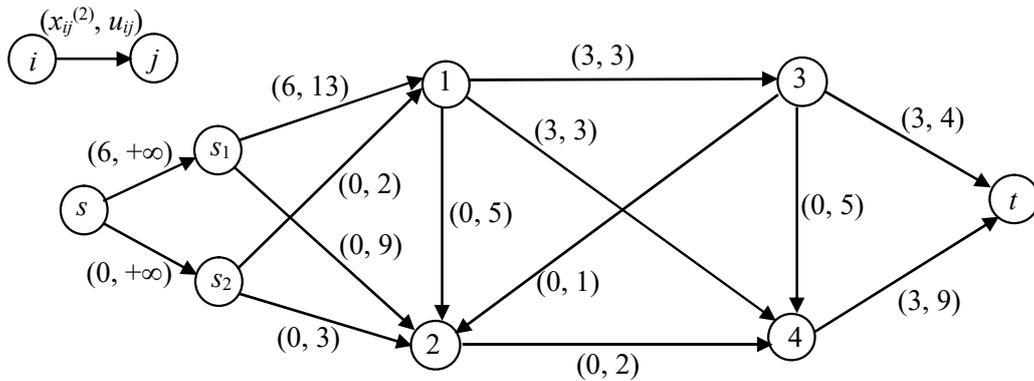


Figura S5.56. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(2)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(2)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.57, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

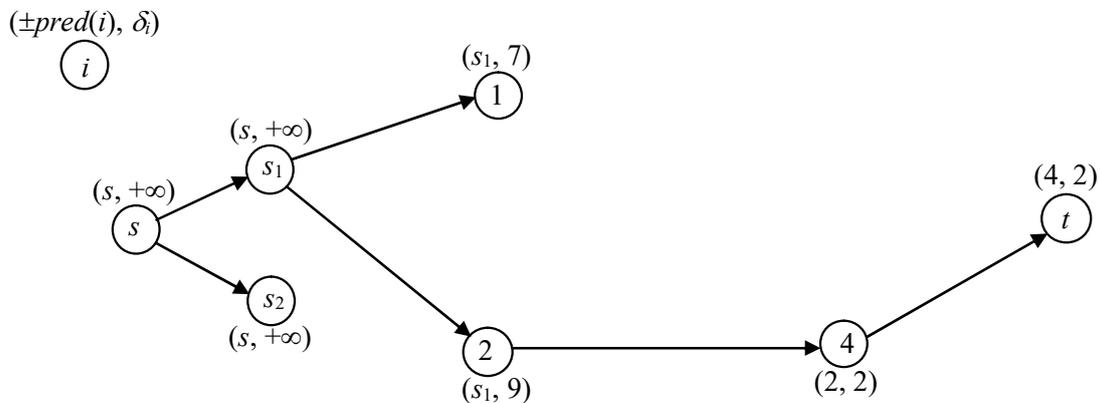


Figura S5.57. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(2)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena

aumentante in $R^{(2)}$ è $P_{st}^{(2)} = (s, s_1, 2, 4, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(2)} = \delta_t = 2$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(2)} = 3$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(2)}$. Sia $\mathbf{x}^{(3)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R' e sia $R^{(3)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.58. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(3)} = v^{(2)} + \delta^{(2)} = 8$.

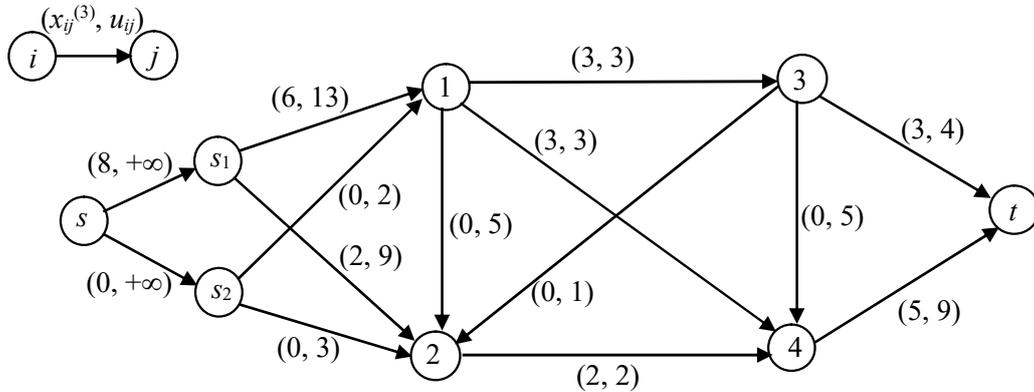


Figura S5.58. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(3)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(3)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.59, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

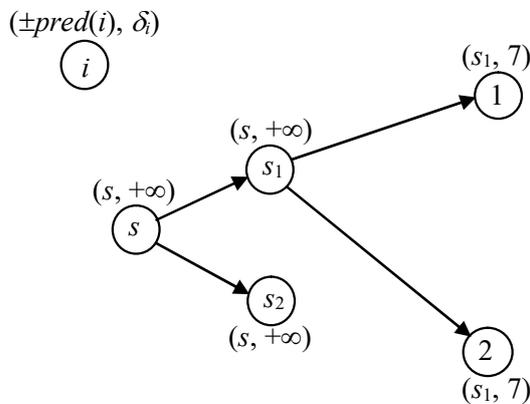


Figura S5.59. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(3)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t .

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(3)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.58) e il valore del massimo flusso netto uscente da s è $v^* = v^{(3)} = 8$.

Il taglio s - t di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = \{s, s_1, s_2, 1, 2\}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{13} + u_{14} + u_{24} = 8$.

Esercizio 5.7

Sia $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ la rete in Figura 5.29. La formulazione del problema del massimo flusso da s a t è la seguente.

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}: (s, j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, s) \in \mathcal{A}} x_{hs} &= v \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (i, j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, i) \in \mathcal{A}} x_{hi} &= 0, \quad i \in \mathcal{N} \setminus \{s, t\}, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (t, j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, t) \in \mathcal{A}} x_{ht} &= -v, \\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

cioè:

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} x_{s1} + x_{s2} + x_{s3} - x_{4s} &= v \\ x_{14} - x_{s1} &= 0 \\ x_{25} - x_{s2} - x_{32} &= 0 \\ x_{32} + x_{35} - x_{s3} - x_{t3} &= 0 \\ x_{4s} - x_{14} - x_{54} - x_{t4} &= 0 \\ x_{54} + x_{5t} - x_{25} - x_{35} &= 0 \\ x_{t3} + x_{t4} - x_{5t} &= -v \\ 0 \leq x_{s1} &\leq 9 \\ 0 \leq x_{s2} &\leq 7 \\ 0 \leq x_{s3} &\leq 6 \\ 0 \leq x_{14} &\leq 8 \\ 0 \leq x_{25} &\leq 12 \\ 0 \leq x_{32} &\leq 5 \\ 0 \leq x_{35} &\leq 10 \\ 0 \leq x_{4s} &\leq 10 \\ 0 \leq x_{54} &\leq 5 \\ 0 \leq x_{5t} &\leq 9 \\ 0 \leq x_{t3} &\leq 8 \\ 0 \leq x_{t4} &\leq 7. \end{aligned}$$

Sia $\mathbf{x}^{(0)}$ la data distribuzione di flusso ammissibile iniziale e sia $R^{(0)}$ la rete di flusso associata e rappresentata in Figura 5.29 (n.b.: $x_{4s} = 8$). Il valore del flusso netto $v^{(0)}$ uscente da s è pari a -2 .

Applichiamo l'algoritmo dei cammini aumentanti sulla rete $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$, operando sulla rete residua $R(\mathbf{x}^{(0)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(0)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.60.

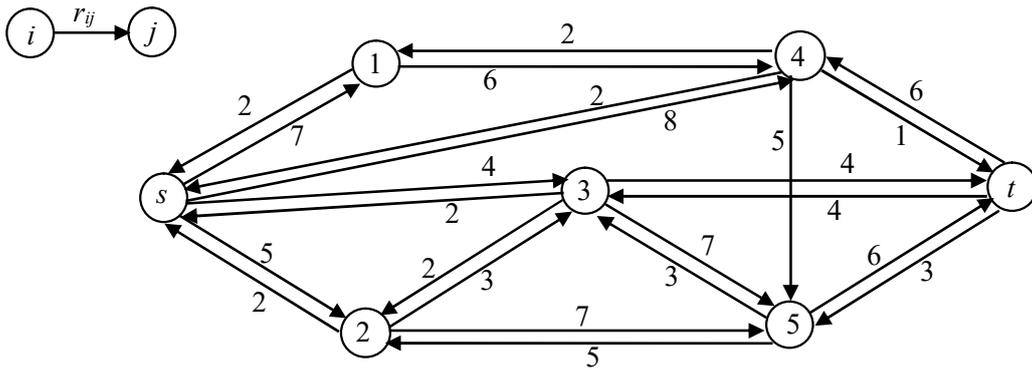


Figura S5.60. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(0)})$.

La procedura di ricerca del cammino aumentante da s a t nella rete residua $R(\mathbf{x}^{(0)})$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.61, dove δ_i rappresenta la capacità del cammino da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

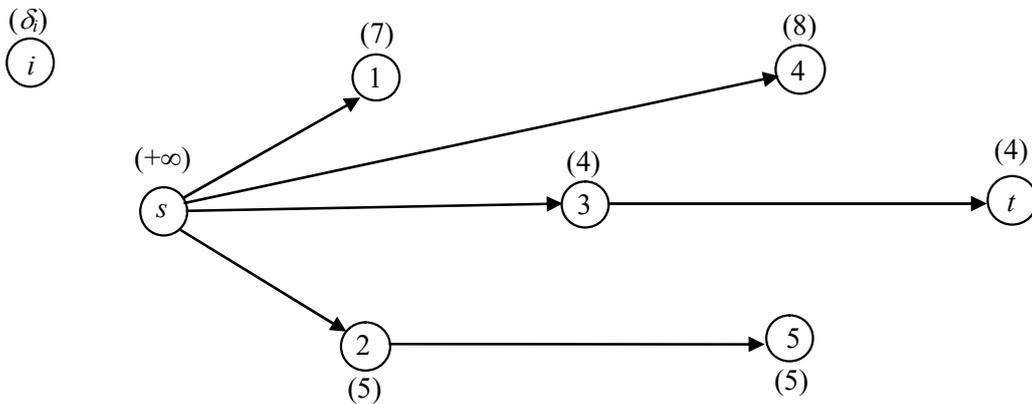


Figura S5.61. Albero di ricerca dei cammini aumentanti su $R(\mathbf{x}^{(0)})$.

La ricerca del cammino aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . Il cammino aumentante in $R(\mathbf{x}^{(0)})$ è $P_{st}^{(0)} = (s, 3, t)$ e la sua capacità è $\delta^0 = \delta_3 = 4$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^0 = 4$ unità lungo gli archi del cammino aumentante $P_{st}^{(0)}$. Sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R . Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(1)} = v^{(0)} + \delta^0 = 2$. Otteniamo la rete residua $R(\mathbf{x}^{(1)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(1)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.62.

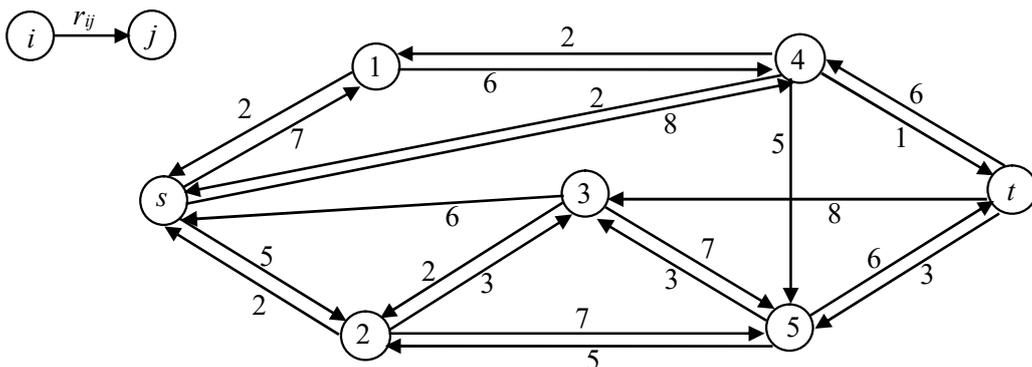


Figura S5.62. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(1)})$.

La procedura di ricerca del cammino aumentante da s a t nella rete residua $R(\mathbf{x}^{(1)})$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.63, dove δ_i rappresenta la capacità del cammino da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

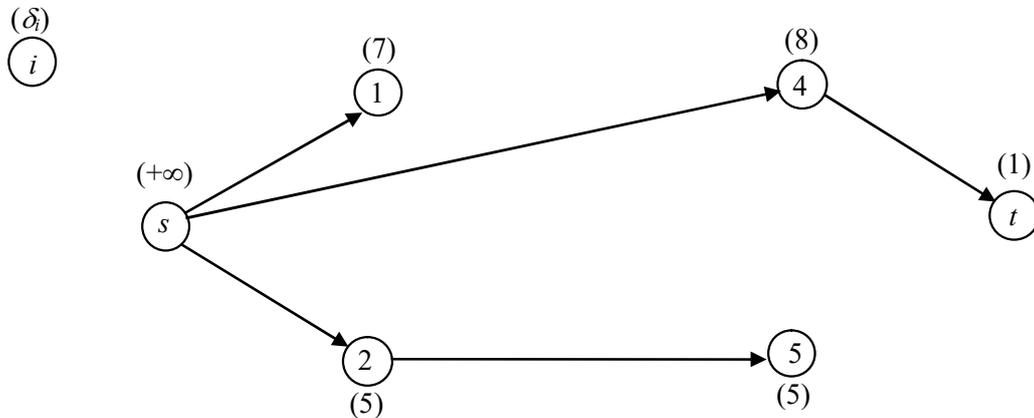


Figura S5.63. Albero di ricerca dei cammini aumentanti su $R(\mathbf{x}^{(1)})$.

La ricerca del cammino aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . Il cammino aumentante in $R(\mathbf{x}^{(1)})$ è $P_{st}^{(1)} = (s, 4, t)$ e la sua capacità è $\delta^1 = \delta_t = 1$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^1 = 1$ unità lungo gli archi del cammino aumentante $P_{st}^{(1)}$. Sia $\mathbf{x}^{(2)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R . Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(2)} = v^{(1)} + \delta^1 = 3$. Otteniamo la rete residua $R(\mathbf{x}^{(2)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(2)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.64.

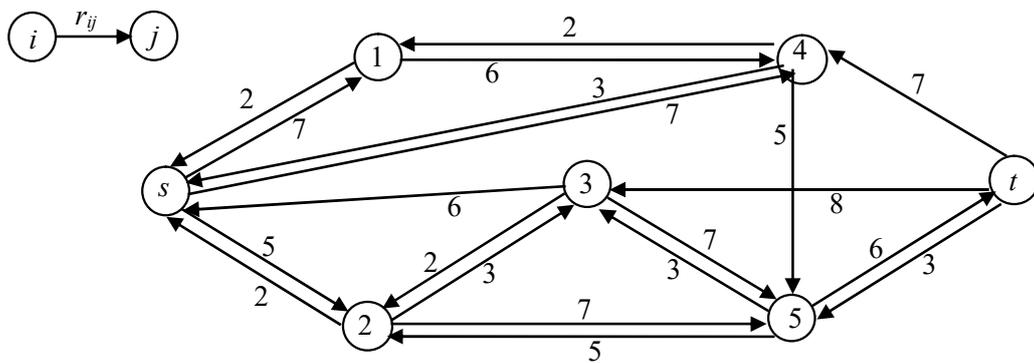


Figura S5.64. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(2)})$.

La procedura di ricerca del cammino aumentante da s a t nella rete residua $R(\mathbf{x}^{(2)})$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.65, dove δ_i rappresenta la capacità del cammino da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

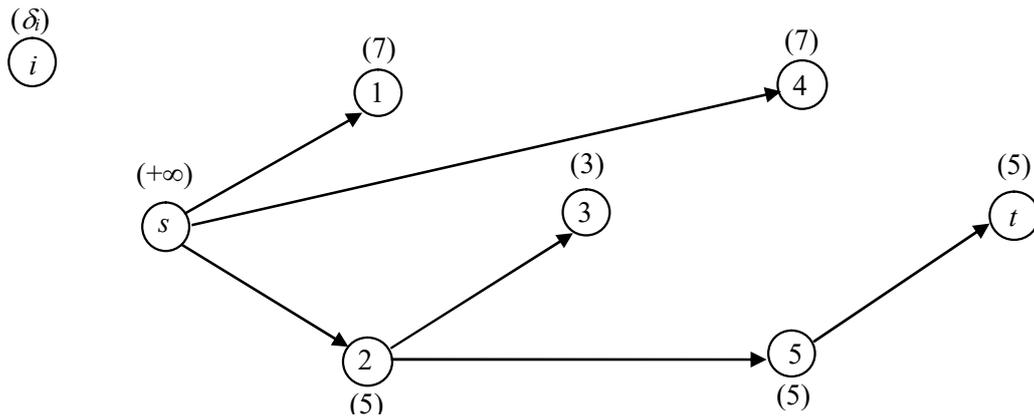


Figura S5.65. Albero di ricerca dei cammini aumentanti su $R(x^{(2)})$.

La ricerca del cammino aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . Il cammino aumentante in $R(x^{(2)})$ è $P_{st}^{(2)} = (s, 2, 5, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(2)} = \delta_t = 5$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(2)} = 5$ unità lungo gli archi del cammino aumentante $P_{st}^{(2)}$. Sia $x^{(3)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R . Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(3)} = v^{(2)} + \delta^{(2)} = 8$. Otteniamo la rete residua $R(x^{(3)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(3)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.66.

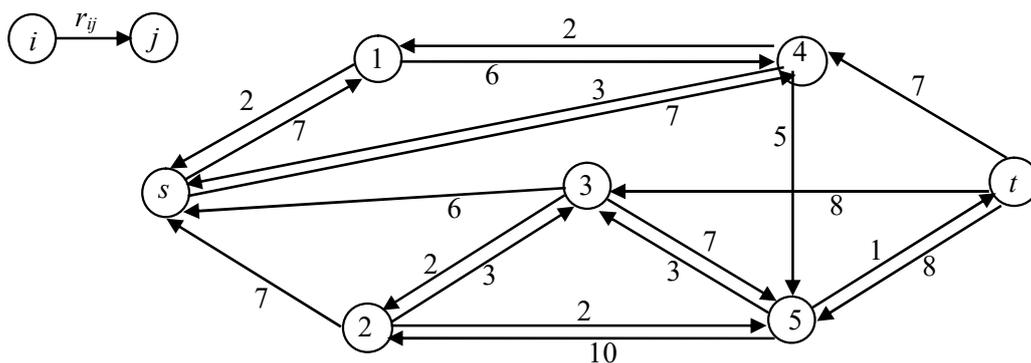


Figura S5.66. Rappresentazione della rete residua $R(x^{(3)})$.

La procedura di ricerca del cammino aumentante da s a t nella rete residua $R(x^{(3)})$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.67, dove δ_i rappresenta la capacità del cammino da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

La ricerca del cammino aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . Il cammino aumentante in $R(x^{(3)})$ è $P_{st}^{(3)} = (s, 4, 5, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(3)} = \delta_t = 1$.

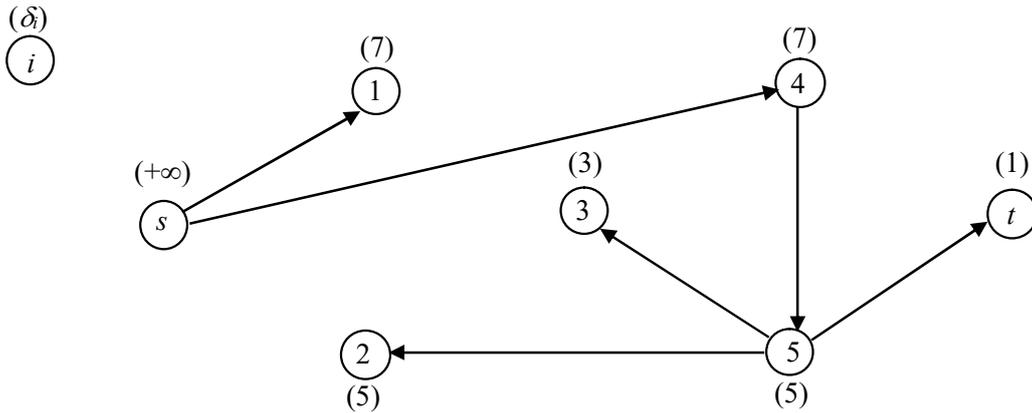


Figura S5.67. Albero di ricerca dei cammini aumentanti su $R(\mathbf{x}^{(3)})$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^3 = 1$ unità lungo gli archi del cammino aumentante $P_{st}^{(3)}$. Sia $\mathbf{x}^{(4)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R . Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(4)} = v^{(3)} + \delta^3 = 9$. Otteniamo la rete residua $R(\mathbf{x}^{(4)}) = (\mathcal{N}, \mathcal{A}^{(4)}, \mathbf{r})$ riportata in Figura S5.68.

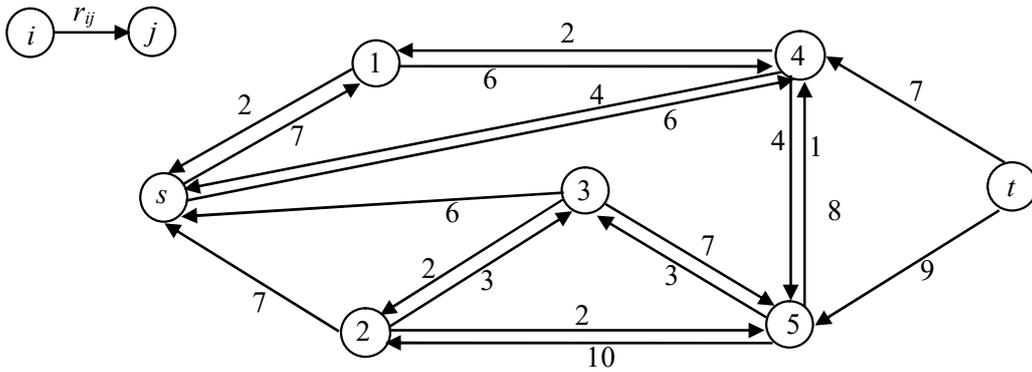


Figura S5.68. Rappresentazione della rete residua $R(\mathbf{x}^{(4)})$.

La procedura di ricerca del cammino aumentante da s a t nella rete residua $R(\mathbf{x}^{(4)})$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.69, dove δ_i rappresenta la capacità del cammino da s al nodo i sull'albero.

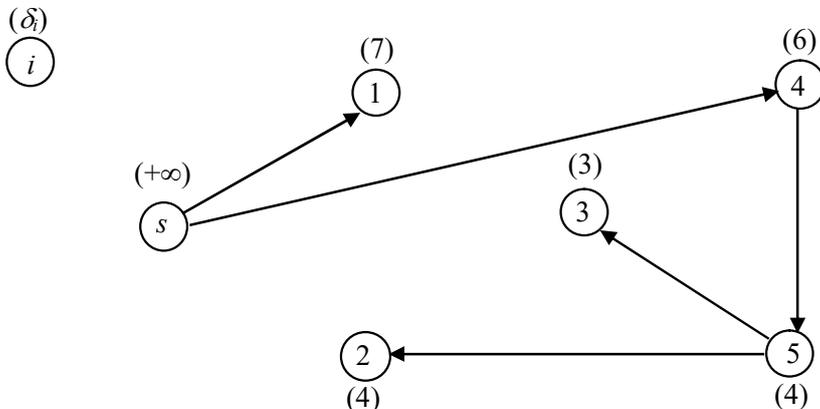


Figura S5.69. Albero di ricerca dei cammini aumentanti su $R(\mathbf{x}^{(4)})$.

La ricerca del cammino aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t .

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(4)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.70) e il valore del massimo flusso netto uscente da s è $v^* = v^{(4)} = 9$. Tale distribuzione di flusso su R è stata ottenuta a partire dalla rete residua finale $R(\mathbf{x}^{(4)})$ di Figura S5.69, ponendo $x_{ij}^{(4)} = \max\{u_{ij} - r_{ij}, 0\}$ e $x_{ji}^{(4)} = \max\{r_{ij} - u_{ij}, 0\}$, per ogni arco $(i, j) \in \mathcal{A}^{(4)}$ della rete residua $R(\mathbf{x}^{(4)})$.

Il taglio s - t di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = \{s, 1, 2, 3, 4, 5\}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{5t} = 9$.

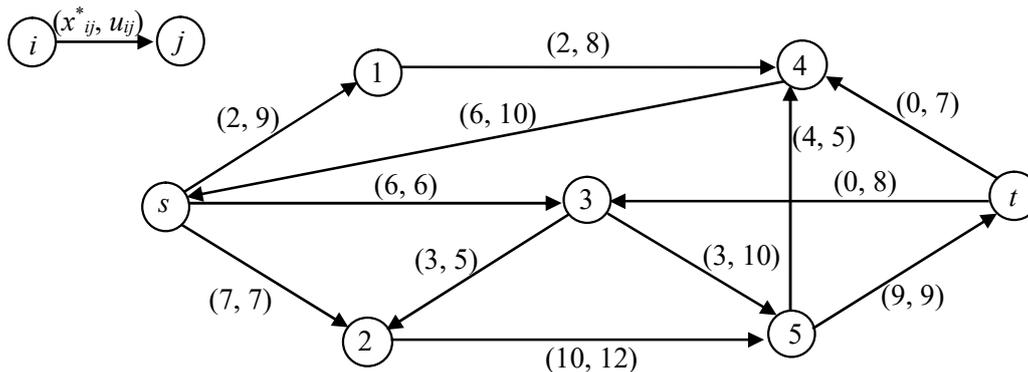


Figura S5.70. Rappresentazione della rete di flusso con il flusso ottimo \mathbf{x}^* .

Esercizio 5.8

Sia $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \ell, \mathbf{u})$ la rete in Figura 5.30 (n.b.: l'arco $(t, 4)$ sostituisce l'arco $(4, t)$ con le stesse capacità). La formulazione del problema del massimo flusso da s a t è la seguente.

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}: (s, j) \in \mathcal{A}} x_{sj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, s) \in \mathcal{A}} x_{hs} &= v \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (i, j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, i) \in \mathcal{A}} x_{hi} &= 0, \quad i \in \mathcal{N} \setminus \{s, t\}, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}: (t, j) \in \mathcal{A}} x_{tj} - \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, t) \in \mathcal{A}} x_{ht} &= -v, \\ \ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

cioè:

$$\max z = v$$

s. v.

$$\begin{aligned} x_{s2} + x_{s3} - x_{1s} &= v \\ x_{1s} + x_{12} - x_{41} &= 0 \\ x_{2s} - x_{s2} - x_{12} &= 0 \\ x_{3t} - x_{s3} - x_{43} &= 0 \\ x_{41} + x_{43} - x_{t4} &= 0 \\ x_{5t} - x_{25} &= 0 \\ x_{t4} - x_{3t} - x_{5t} &= -v \\ 3 \leq x_{s2} &\leq 7 \\ 5 \leq x_{s3} &\leq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 &\leq x_{1s} \leq 8 \\
2 &\leq x_{12} \leq 7 \\
4 &\leq x_{2s} \leq 9 \\
3 &\leq x_{3t} \leq 10 \\
7 &\leq x_{41} \leq 10 \\
2 &\leq x_{43} \leq 5 \\
5 &\leq x_{5t} \leq 7 \\
4 &\leq x_{t4} \leq 9.
\end{aligned}$$

Al fine della determinazione della distribuzione di massimo flusso nella rete R , determiniamo inizialmente una distribuzione di flusso ammissibile iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ nella rete. A tale scopo determiniamo un flusso ammissibile $\underline{\mathbf{x}}'$ nella rete $R' = (\mathcal{N}, \mathcal{A}', \mathbf{b}, \ell' = \mathbf{0}, \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \ell)$, mostrata in Figura S5.71, dove $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(t, s)\}$, $u_{ts} = +\infty$ e $b_i = \sum_{h \in \mathcal{N}: (h, i) \in \mathcal{A}} \ell_{hi} - \sum_{j \in \mathcal{N}: (i, j) \in \mathcal{A}} \ell_{ij}$, $i \in \mathcal{N}$.

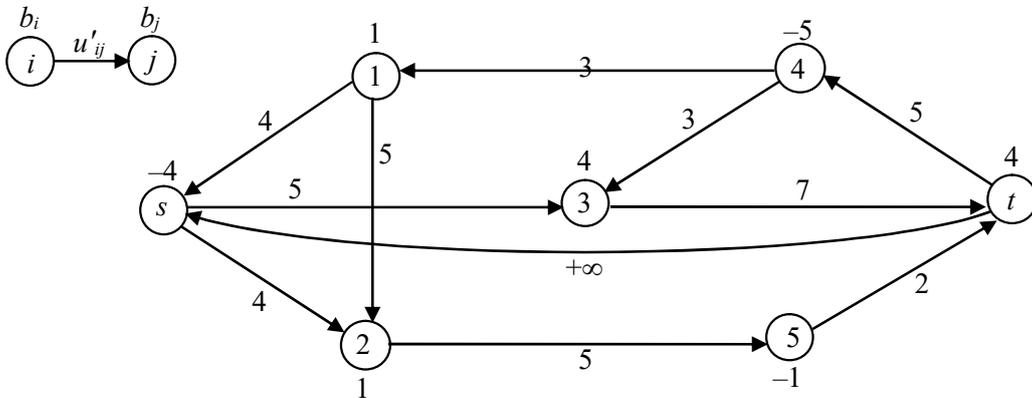


Figura S5.71. Rappresentazione della rete R' associata alla rete R .

La determinazione di una distribuzione di flusso ammissibile $\underline{\mathbf{x}}'$ in R' consiste a sua volta nella risoluzione del problema del massimo flusso da s' a t' sulla rete $R'' = (\mathcal{N}'', \mathcal{A}'', \ell'' = \mathbf{0}, \mathbf{u}'')$, riportata in Figura S5.72, dove $\mathcal{N}'' = \mathcal{N} \cup \{(t', s')\}$, $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}' \cup \{(s', j) \mid b_j > 0, j \in \mathcal{N}\} \cup \{(i, t') \mid b_i < 0, i \in \mathcal{N}\}$, con $u''_{s'j} = b_j$, $(s', j) \in \mathcal{A}''$, e $u''_{it'} = -b_i$, $(i, t') \in \mathcal{A}''$.

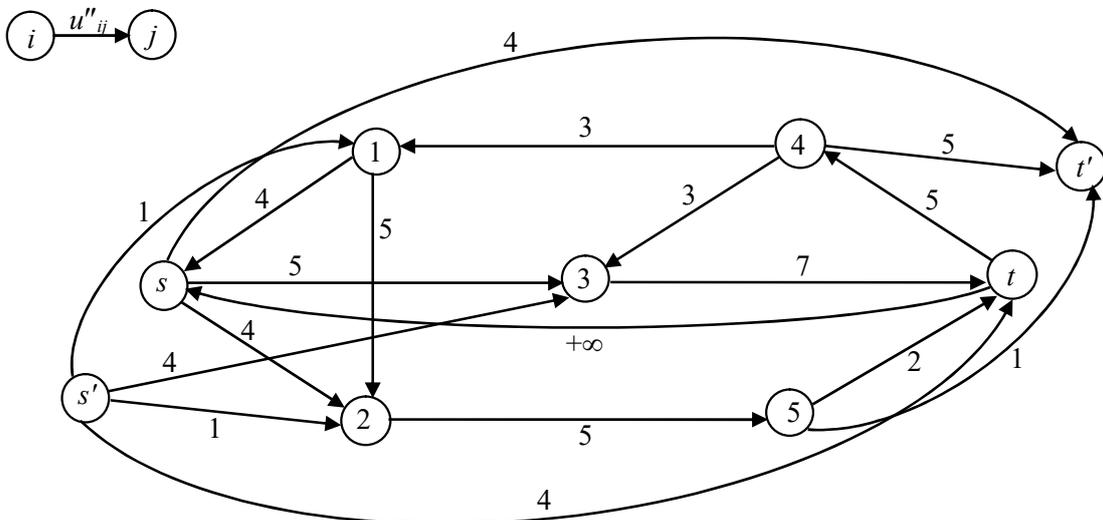


Figura S5.72. Rappresentazione della rete R'' .

Fissata la distribuzione di flusso iniziale $\mathbf{x}''^{(0)} = \mathbf{0}$ e indicata con $R''^{(0)}$ la rete di flusso associata, applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson, con ricerca in ampiezza delle catene aumentanti da s' a t' sulle reti di flusso $R''^{(k)}$ di R'' , si determinano in successione le seguenti catene aumentanti $P''^{(k)}_{s't'}$ (si lascia al lettore la loro generazione) aumentando ogni volta il flusso lungo la catena individuata per un ammontare pari alla sua capacità $\delta''^{(k)}$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

$P''^{(0)}_{s't'} = (s', 1, s, t')$ di capacità $\delta''^{(0)} = 1$;

$P''^{(1)}_{s't'} = (s', 2, 5, t')$ di capacità $\delta''^{(1)} = 1$;

$P''^{(2)}_{s't'} = (s', t, 4, t')$ di capacità $\delta''^{(2)} = 4$;

$P''^{(3)}_{s't'} = (s', 3, t, s, t')$ di capacità $\delta''^{(3)} = 3$;

$P''^{(4)}_{s't'} = (s', 3, t, 4, t')$ di capacità $\delta''^{(4)} = 1$.

La distribuzione di flusso finale ottenuta \mathbf{x}''^* di valore $v''^* = 10$ nella rete R'' , rappresentata nella Figura S5.73, è ottima; si può verificarne l'ottimalità notando che $u''[\{s'\}, \mathcal{N}'' \setminus \{s'\}] = u''_{s'1} + u''_{s'2} + u''_{s'3} + u''_{s't} = 10$.

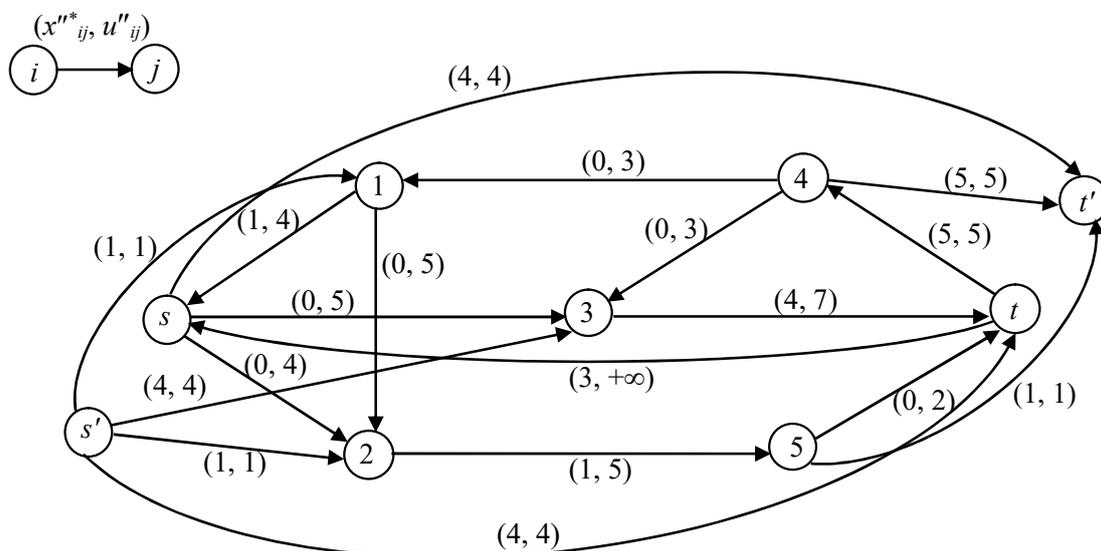


Figura S5.71. Rappresentazione della rete di flusso con il flusso ottimo \mathbf{x}''^* nella rete R'' .

Il flusso ottimo \mathbf{x}''^* satura gli archi uscenti da s' e quelli entranti in t' , pertanto individua la distribuzione di flusso ammissibile $\underline{\mathbf{x}}$ nella rete R' , mostrata nella rete di flusso \underline{R}' di Figura S5.74.

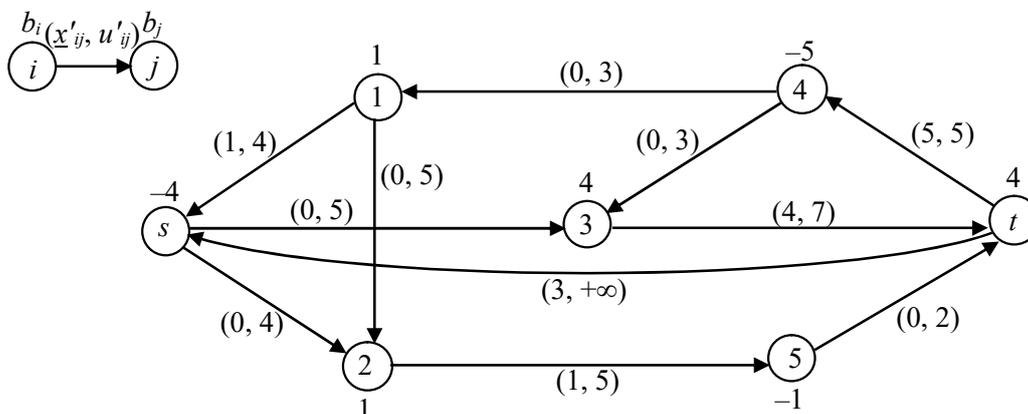


Figura S5.74. Rappresentazione della rete di flusso \underline{R}' .

La distribuzione di flusso $\mathbf{x}^{(0)} = \underline{\mathbf{x}}' + \mathbf{l}$, e la associata rete di flusso $R^{(0)}$ di Figura S5.75, con valore del flusso netto $v^{(0)}$ uscente da s è pari a 3, è quindi la cercata distribuzione di flusso iniziale in R a partire dalla quale determinare il massimo flusso su R .

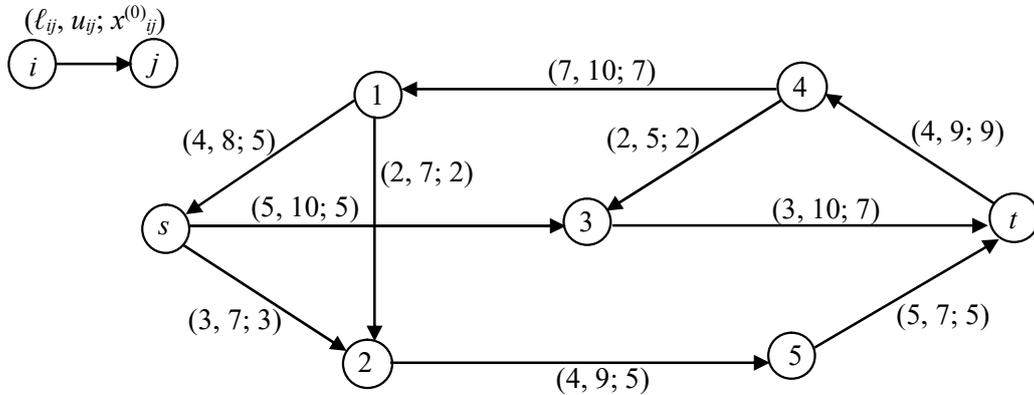


Figura S5.75. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(0)}$.

A partire dalla distribuzione di flusso iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ e applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson, con ricerca in ampiezza delle catene aumentanti da s a t sulle reti di flusso $R^{(k)}$ di R , si determinano in successione le seguenti catene aumentanti $P^{(k)}_{st}$ (si lascia al lettore la loro generazione) aumentando ogni volta il flusso lungo la catena individuata per un ammontare pari alla sua capacità $\delta^{(k)}$, per $k = 0, 1$:

$P^{(0)}_{st} = (s, 3, t)$ di capacità $\delta^{(0)} = 3$;

$P^{(1)}_{st} = (s, 2, 5, t)$ di capacità $\delta^{(1)} = 2$.

La distribuzione di flusso finale ottenuta \mathbf{x}^* di valore $v^* = 8$ nella rete R , e l'associata rete di flusso rappresentata nella Figura S5.76, è ottima; infatti, il taglio s - t $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, dove $S^* = \{s, 1, 2, 3, 5\}$ è l'insieme dei nodi raggiungibili con catene aumentanti sulla rete di flusso ottima, ha capacità $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{3t} + u_{5t} - \ell_{41} - \ell_{43} = 8$, che quindi rappresenta il taglio separatore di capacità minima.

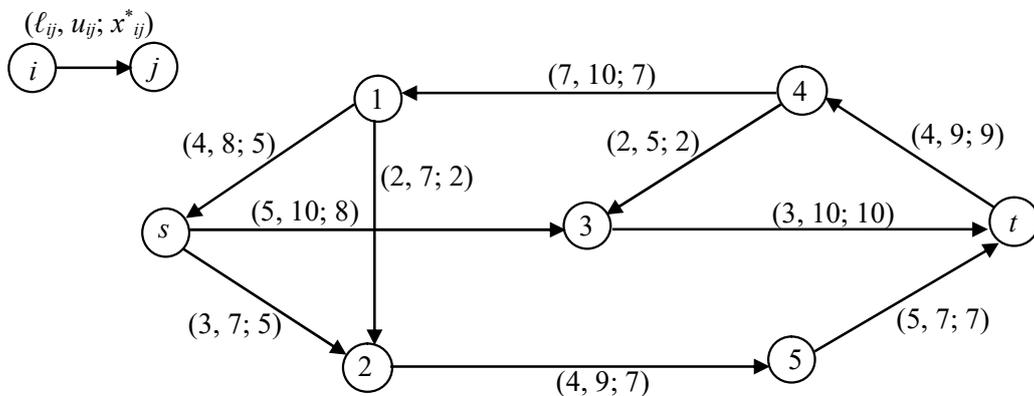


Figura S5.76. Rappresentazione della rete di flusso con il flusso ottimo \mathbf{x}^* nella rete R .

Esercizio 5.9

Sia $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ la rete in Figura S5.77 ottenuta da quella originale rappresentata in Figura 5.31, sostituendo gli archi non orientati $\langle i, j \rangle$ con la coppia di archi orientati (i, j) , (j, i) , di capacità pari a quella degli archi sostituiti. Il problema che si vuole risolvere corrisponde al problema del massimo flusso su R .

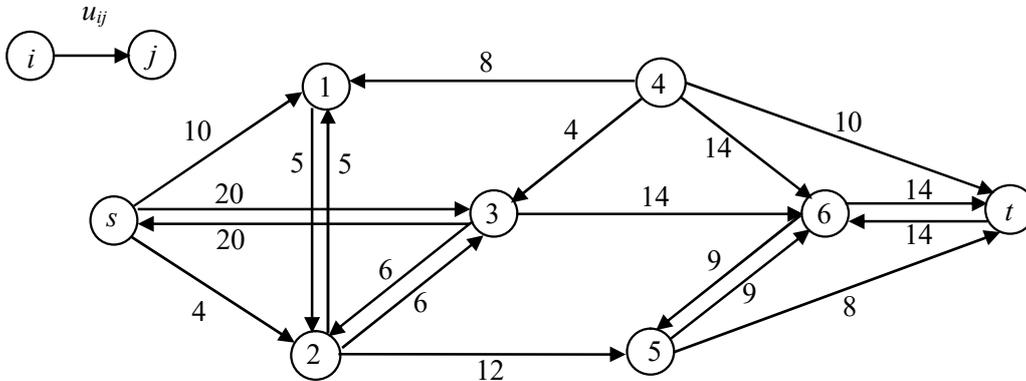


Figura S5.77. Rappresentazione della rete R .

Applichiamo l'algoritmo di Ford & Fulkerson sulla rete R . Sia $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ la distribuzione di flusso ammissibile iniziale e $R^{(0)}$ la associata rete di flusso. Il valore del flusso netto $v^{(0)}$ uscente da s è ovviamente pari a 0.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(0)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.78, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge il nodo pozzo t .

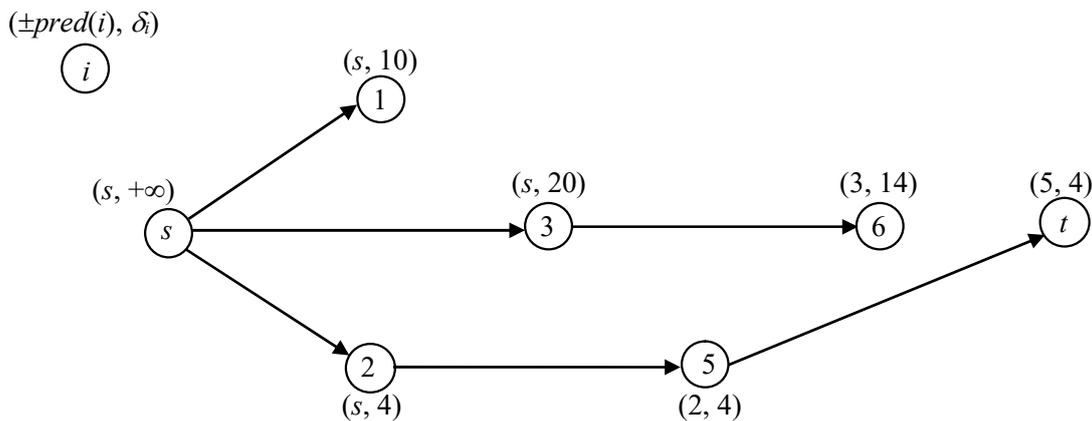


Figura S5.78. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(0)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(0)}$ è $P_{st}^{(0)} = (s, 2, 5, t)$ e la sua capacità è $\delta^0 = \delta_t = 4$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^0 = 4$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(0)}$. Sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(1)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.79. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(1)} = v^{(0)} + \delta^0 = 4$.

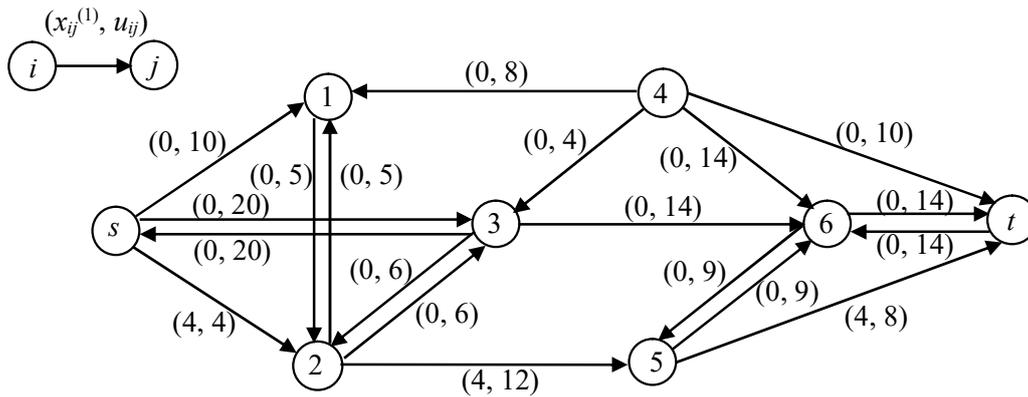


Figura S5.79. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(1)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(1)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.80, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge t .

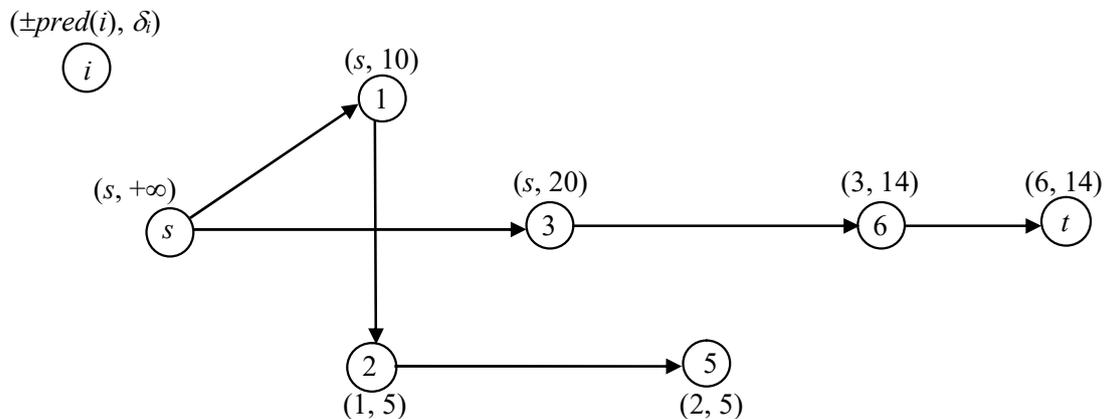


Figura S5.80. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(1)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(1)}$ è $P_{st}^{(1)} = (s, 3, 6, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(1)} = \delta_t = 14$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(1)} = 14$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(1)}$. Sia $\mathbf{x}^{(2)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(2)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.81. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(2)} = v^{(1)} + \delta^{(1)} = 18$.

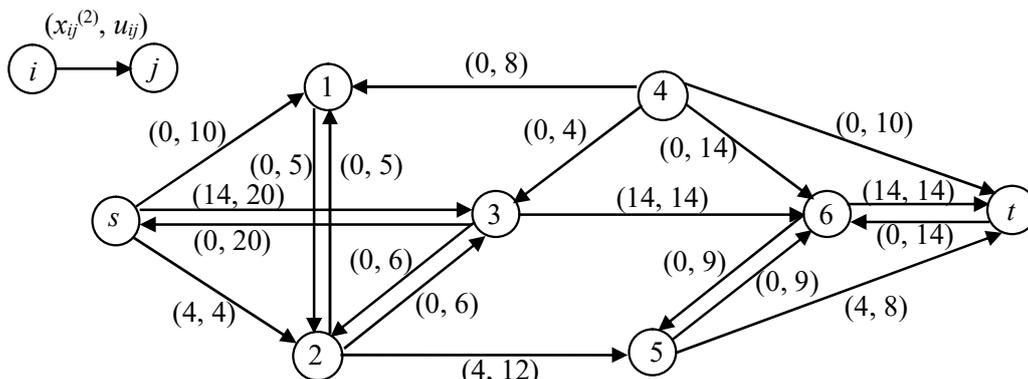


Figura S5.81. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(2)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(2)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.82, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero, arrestando la ricerca non appena si raggiunge t .

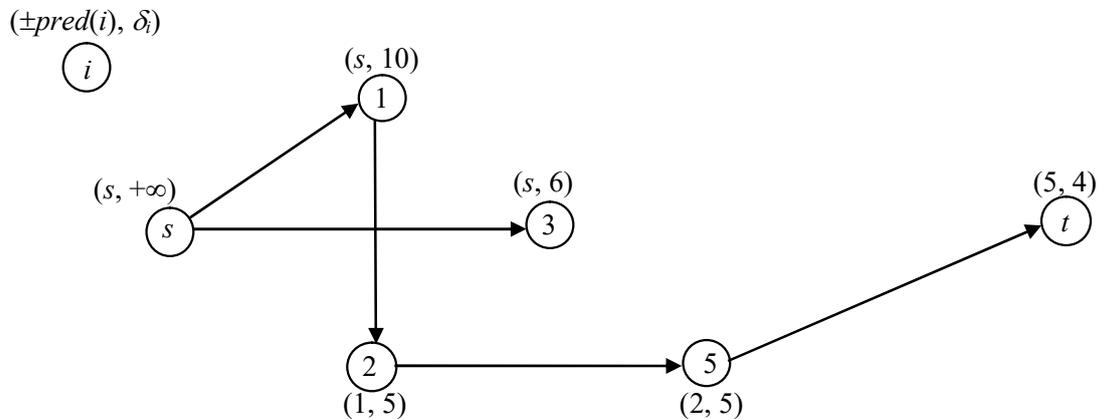


Figura S5.82. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(2)}$.

La ricerca della catena aumentante ha termine giacché è stato raggiunto (etichettato) il nodo t . La catena aumentante in $R^{(2)}$ è $P_{st}^{(2)} = (s, 1, 2, 5, t)$ e la sua capacità è $\delta^{(2)} = \delta_t = 4$.

Si aumenta, quindi, il flusso di $\delta^{(2)} = 4$ unità lungo gli archi della catena aumentante $P_{st}^{(2)}$. Sia $\mathbf{x}^{(3)}$ la nuova distribuzione ammissibile di flusso sulla rete R e sia $R^{(3)}$ la corrispondente rete di flusso riportata in Figura S5.83. Il valore del flusso netto uscente da s è $v^{(3)} = v^{(2)} + \delta^{(2)} = 22$.

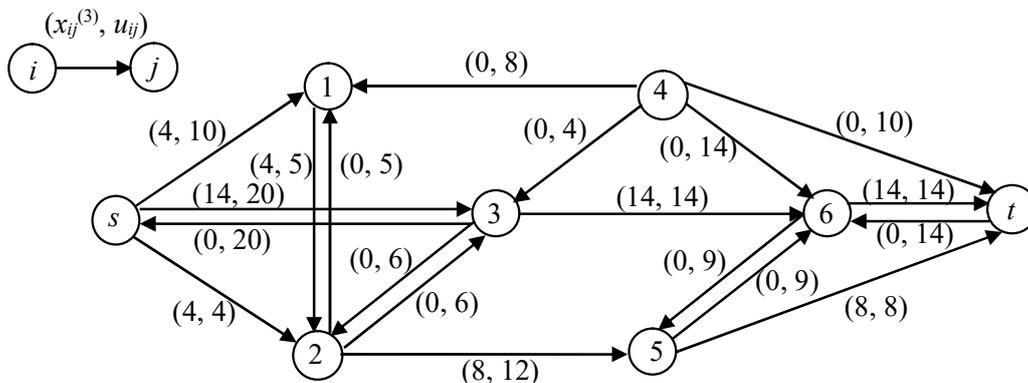


Figura S5.83. Rappresentazione della rete di flusso $R^{(3)}$.

La procedura di ricerca della catena aumentante da s a t nella rete di flusso $R^{(3)}$ tramite, ad esempio, ricerca in ampiezza genera l'albero di ricerca (arborescenza esterna radicata in s) riportato in Figura S5.84, dove δ_i rappresenta la capacità della catena da s al nodo i sull'albero.

La ricerca del cammino aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t .

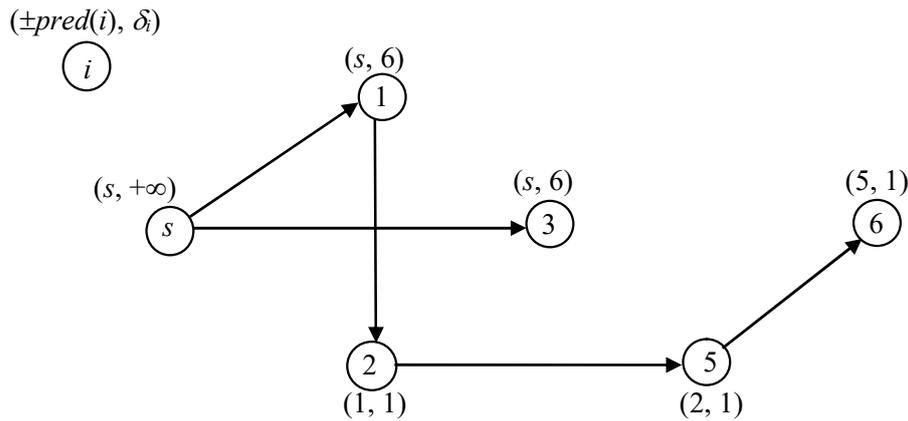


Figura S5.84. Albero di ricerca delle catene aumentanti su $R^{(3)}$.

La ricerca del cammino aumentante ha termine senza avere etichettato il nodo t .

Di conseguenza, il flusso ammissibile $\mathbf{x}^{(3)}$ è il flusso ottimo \mathbf{x}^* (rappresentato nella rete di flusso in Figura S5.83) e il valore del massimo flusso netto uscente da s è $v^* = v^{(3)} = 22$.

Il taglio s - t di capacità minima è $[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*]$, con $S^* = \{s, 1, 2, 3, 5, 6\}$, e la corrispondente capacità è $u[S^*, \mathcal{N} \setminus S^*] = u_{5t} + u_{6t} = 22$.

Dalla rete di flusso ottima di Figura S5.83, si evince che i versi di percorrenza da attribuire agli archi stradali sono i seguenti: $\langle s, 3 \rangle$, da s a 3; $\langle 1, 2 \rangle$ da 1 a 2; $\langle 2, 3 \rangle$, indifferente; $\langle 5, 6 \rangle$, indifferente; $\langle 6, t \rangle$, da 6 a t .

Esercizio 5.10

A titolo d'esempio di consideri l'arborescenza esterna capacitata $T = (\mathcal{N}(T), \mathcal{A}(T), \mathbf{u})$, radicata in s , rappresentata in Figura S5.85.

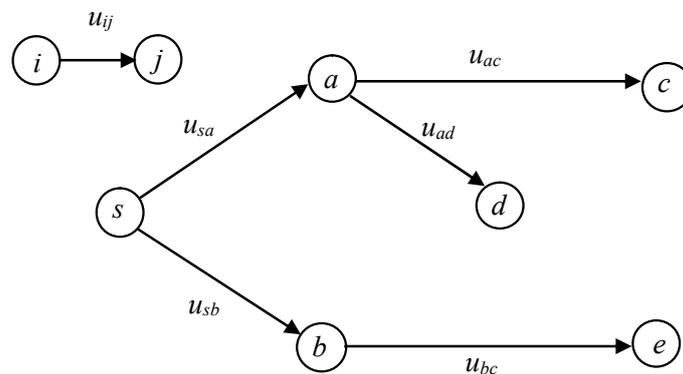


Figura S5.85. Esempio di arborescenza esterna capacitata T radicata in s .

Sia v_{st}^* il valore del massimo flusso dal nodo s al nodo $t \in \mathcal{N}(T) \setminus \{s\}$. Per la struttura della rete T , indicato con $P_{st}(T)$ l'unico cammino da s a t in T , risulta $v_{st}^* = \min\{u_{ij} \mid (i, j) \in P_{st}(T)\}$. Pertanto, l'affermazione a) è falsa, la b) è vera e la c) è falsa.