M. CARAMIA, S. GIORDANI, F. GUERRIERO, R. MUSMANNO, D. PACCIARELLI
OTTIMIZZAZIONE SU RETE
Isedi – De Agostini Scuola SpA, 2019

Esercizi proposti nel Cap. 6 - Soluzioni

Esercizio 6.1

In riferimento ai 4 grafi bipartiti in Figura 6.13, da sinistra a destra, l'insieme degli spigoli del primo grafo bipartito e quello del secondo non individuano un abbinamento in quanto in entrambi i due grafi esiste almeno un vertice di grado maggiore di uno. Per il terzo e il quarto grafo bipartito invece l'insieme degli spigoli dei due grafi individuano in entrambi i casi un abbinamento di $K_{5,5}$. In particolare, l'insieme degli spigoli del terzo grafo bipartito definisce un abbinamento perfetto di $K_{5,5}$ in quanto ogni vertice risulterebbe abbinato, mentre ciò non vale per gli spigoli del quarto grafo bipartito.

Esercizio 6.2

Dato il grafo bipartito $G = (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$, il problema richiede di fatto la determinazione del massimo abbinamento di G, che è equivalente alla determinazione del massimo flusso dal nodo s al nodo t sulla rete capacitata ausiliaria $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathbf{u})$ di Figura S6.1, dove $\mathcal{N} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \{s, t\}$ è l'insieme dei nodi e $\mathcal{A} = \{(i, j) \in \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_1 \mid (i, j) \in \mathcal{E}\} \cup \{(s, j) \mid j \in \mathcal{V}_2\} \cup \{(i, t) \mid i \in \mathcal{V}_1\}$ quello degli archi con le seguenti capacità: $u_{sj} = 1, \forall\, j \in \mathcal{V}_2$, $u_{it} = 1, \forall\, i \in \mathcal{V}_1$, e $u_{ij} = +\infty, \forall\, (i, j) \in \mathcal{E}$.

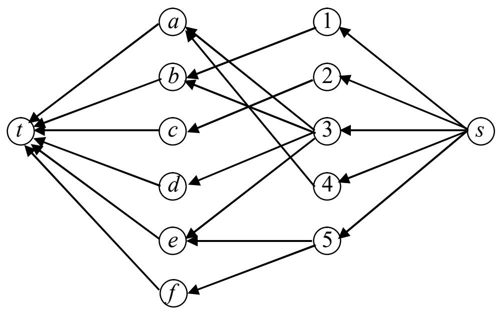


Figura S6.1. Rappresentazione della rete ausiliaria R.

Fissata la distribuzione di flusso iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ e indicata con $R^{(0)}$ la rete di flusso associata, applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson, con ricerca in ampiezza delle catene aumentanti da s a t sulle reti di flusso $R^{(k)}$ di R, si determinano in successione le seguenti catene aumentanti $P^{(k)}_{st}$ (si lascia al lettore la loro determinazione generando gli alberi di ricerca delle catene aumentanti radicati in s) aumentando ogni volta il flusso lungo la catena individuata per un ammontare pari alla sua capacità $\delta^{(k)}$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$:
$P^{(0)}_{st} = (s, 1, b, t)$ di capacità $\delta^{(0)} = 1$;
$P^{(1)}_{st} = (s, 2, c, t)$ di capacità $\delta^{(1)} = 1$;
$P^{(2)}_{st} = (s, 3, a, t)$ di capacità $\delta^{(2)} = 1$;
$P^{(3)}_{st} = (s, 5, e, t)$ di capacità $\delta^{(3)} = 1$;
$P^{(4)}_{st} = (s, 4, a, 3, d, t)$ di capacità $\delta^{(4)} = 1$.

La distribuzione di flusso finale ottenuta $\mathbf{x}^*$ di valore $v^* = 5$ nella rete R, rappresentata nella Figura S6.2, è ottima; si può verificarne l'ottimalità notando che la capacità del taglio s-t $[S^*, \mathcal{N}\setminus S^*]$, con $S^* = \{s\}$, è $u[S^*, \mathcal{N}\setminus S^*] = u_{s1} + u_{s2} + u_{s3} + u_{s4} + u_{s4} = 5$.

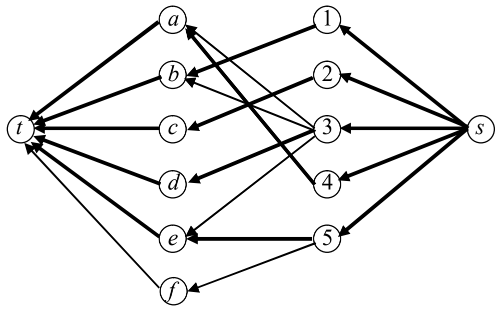


Figura S6.2. Rappresentazione della rete di flusso con il flusso ottimo $\mathbf{x}^*$ nella rete R in cui il flusso è unitario sugli archi in grassetto e nullo sugli altri.

L'abbinamento $M^* = \{(i, j) \in \mathcal{E} \mid x_{ij}^* = 1\} = \{(1, b), (2, c), (3, d), (4, a), (5, e)\}$ di cardinalità $|M^*| = 5$ è l'abbinamento massimo del grafo bipartito G e $S_2^* = S^*\setminus\{s\} = \varnothing$ è l'insieme dei vertici di G raggiungibili da vertici esposti di $\mathcal{V}_2$. Tutti i vertici di $\mathcal{V}_2$ risultano abbinati, pertanto il grafo ammette abbinamento $\mathcal{V}_2$-completo. D'altra parte, non esiste alcun sottoinsieme non vuoto Q_2 di $\mathcal{V}_2$ che viola la condizione di Hall, ossia per cui l'insieme dei vertici adiacenti $N(Q_2)$ presenti cardinalità inferiore a quella di Q_2, in quanto $Q_2 = \mathcal{V}_2 \cap S_2^* = \varnothing$.

Esercizio 6.3

Dato il grafo bipartito $G = (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}, \mathcal{E})$ in Figura 6.14, il problema richiede di fatto la determinazione del massimo abbinamento di G.

Partendo dall'abbinamento $M^{(0)} = \varnothing$, applichiamo l'algoritmo dei cammini alternanti aumentanti con ricerca in ampiezza dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ dato l'abbinamento $M^{(k)}$ su G, arrestando la ricerca quando questa fallisce. Si determinano in successione i seguenti cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, ottenendo ogni volta un nuovo abbinamento $M^{(k+1)} = M^{(k)} \oplus P^{(k)}$ di cardinalità $|M^{(k)}| + 1$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$:
$P^{(0)} = (x_1, y_1)$;
$P^{(1)} = (x_2, y_2)$;
$P^{(2)} = (x_3, y_5)$;
$P^{(3)} = (x_4, y_3)$;
$P^{(4)} = (x_5, y_1, x_1, y_3, x_4, y_4)$.

Le Figure S6.3–S6.7 mostrano gli abbinamenti $M^{(k)}$ e gli alberi di ricerca $T^{(k)}$ generati per trovare i cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$, interrompendo la ricerca non appena si visita un vertice esposto di $\mathcal{Y}$.

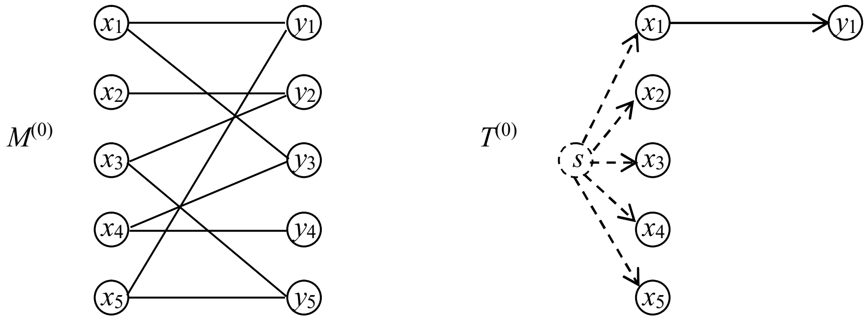


Figura S6.3. L'abbinamento $M^{(0)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(0)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di X a vertici esposti di Y per la determinazione di $P^{(0)}$.

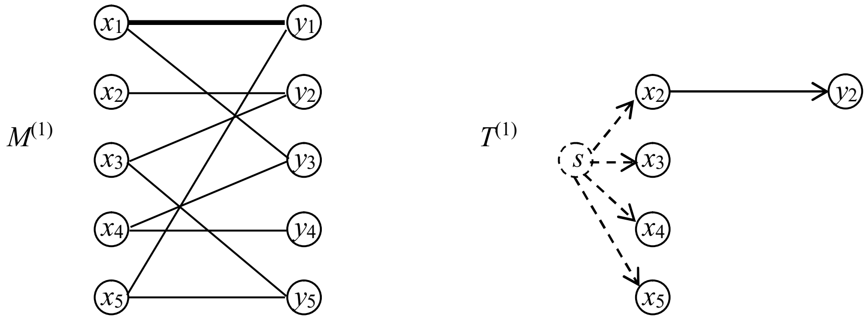


Figura S6.4. L'abbinamento $M^{(1)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di X a vertici esposti di Y per la determinazione di $P^{(1)}$.

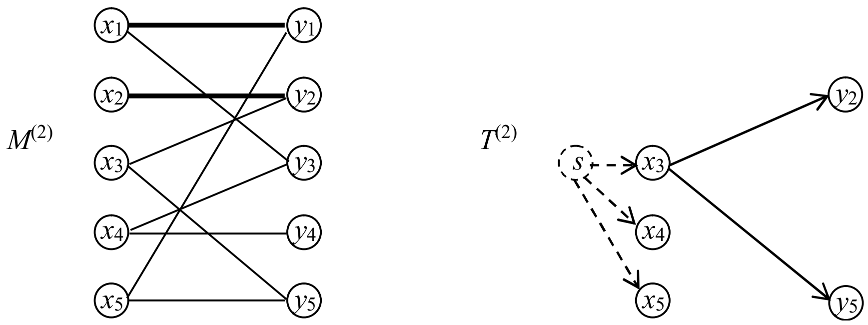


Figura S6.5. L'abbinamento $M^{(2)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(2)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di X a vertici esposti di Y per la determinazione di $P^{(2)}$.

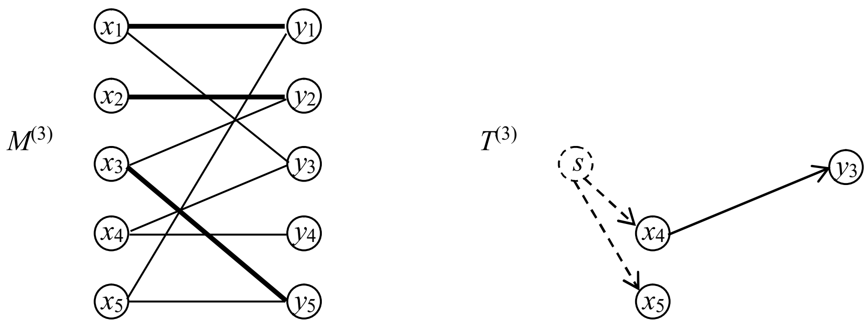


Figura S6.6. L'abbinamento $M^{(3)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(3)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di X a vertici esposti di Y per la determinazione di $P^{(3)}$.

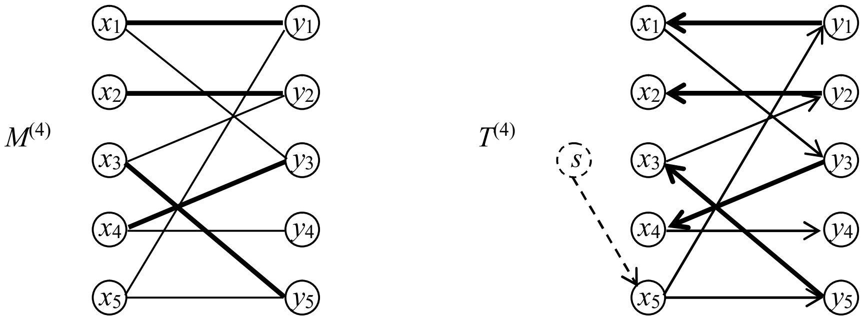


Figura S6.7. L'abbinamento $M^{(4)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(4)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ per la determinazione di $P^{(4)}$.

La Figura S6.8 mostra l'abbinamento finale ottimo $M^* = M^{(5)} = \{(x_1, y_3), (x_2, y_2), (x_3, y_5), (x_4, y_4), (x_5, y_1)\}$ di (massima) cardinalità $|M^*| = 5$ e la ricerca del successivo cammino alternante aumentante da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ che ovviamente termina senza la sua determinazione, verificando che non ne esistono (si veda in figura l'albero di ricerca $T^{(5)}$ dei cammini aumentanti generato da vertici esposti di $\mathcal{X}$), e ritornando l'insieme $S^* = \emptyset$ dei vertici raggiungibili con cammini alternanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$.

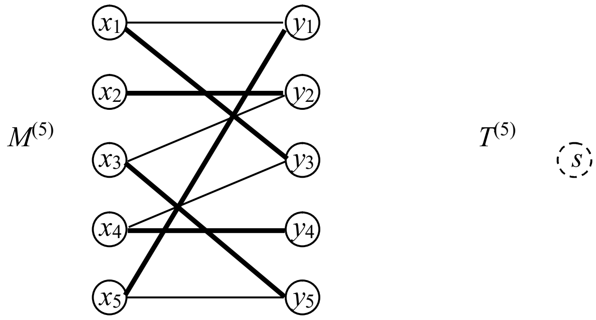


Figura S6.8. L'abbinamento massimo $M^* = M^{(5)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(5)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ da cui si evince la non esistenza di cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$.

In base all'abbinamento M^*, tutti i vertici di $\mathcal{X}$ risultano abbinati, pertanto il grafo bipartito ammette abbinamento $\mathcal{X}$-completo. D'altra parte, non esiste alcun sottoinsieme non vuoto Q di $\mathcal{X}$ che viola la condizione di Hall, ossia per cui l'insieme dei vertici adiacenti $N(Q)$ presenti cardinalità inferiore a quella di Q, in quanto $Q = \mathcal{X} \cap S^* = \emptyset$.

Dato l'abbinamento M^*, in base all'insieme $S^* = \emptyset$ dei vertici raggiungibili con cammini alternanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$, si individua il seguente minimo insieme ricoprente (vertex cover) $W^* = (\mathcal{X} \setminus S^*) \cup (\mathcal{Y} \cap S^*) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e da questo il massimo insieme stabile (indipendente) $I^* = (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \setminus W^* = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ del grafo G.

Esercizio 6.4

In riferimento al grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ in Figura 6.15, privo di cicli dispari e pertanto bipartito, determiniamo innanzitutto una bipartizione d G, attraverso la partizione di $\mathcal{V}$ nei due insiemi $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ contenenti rispettivamente i vertici a distanza pari e a distanza dispari da uno dei vertici, ad esempio il vertice 1. Al fine di determinare le distanze $d(1, j), j \in \mathcal{V}$, effettuiamo una visita in ampiezza di G dal vertice 1, il cui albero di ricerca generato è rappresentato in Figura S6.9, ottenendo le seguenti distanze: $d(1, 1) = 0$, $d(1, 2) = 1$, $d(1, 4) = 1$, $d(1, 6) = 1$, $d(1, 3) = 2$, $d(1, 5) = 2$, $d(1, 7) = 3$, $d(1, 8) = 3$. Verificato che il grafo è effettivamente privo di cicli dispari (non ci sono adiacenze tra coppie di vertici entrambi a distanza pari o entrambi a distanza dispari) otteniamo $\mathcal{X} = \{1, 3, 5\}$ e $\mathcal{Y} = \{2, 4, 6, 7, 8\}$. Sia quindi $G = (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}, \mathcal{E})$ il grafo bipartito con la bipartizione $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dei vertici.

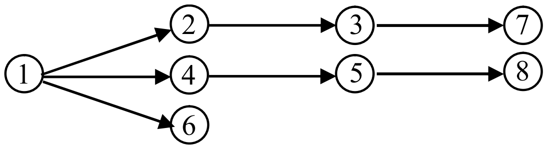


Figura S6.9. Albero di ricerca in ampiezza di G.

Partendo dall'abbinamento $M^{(0)} = \emptyset$, applichiamo l'algoritmo dei cammini alternanti aumentanti con ricerca in ampiezza dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ dato l'abbinamento $M^{(k)}$ su G, arrestando la ricerca quando questa fallisce. Si determinano in successione i seguenti cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, ottenendo ogni volta un nuovo abbinamento $M^{(k+1)} = M^{(k)} \oplus P^{(k)}$ di cardinalità $|M^{(k)}| + 1$, per $k = 0, 1, 2$:

$P^{(0)} = (1, 2)$;
$P^{(1)} = (3, 7)$;
$P^{(2)} = (5, 4)$.

Le Figure S6.10–S6.12 mostrano gli abbinamenti $M^{(k)}$ e gli alberi di ricerca $T^{(k)}$ generati per trovare i cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, per $k = 0, 1, 2$, da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$, interrompendo la ricerca non appena si visita un vertice esposto di $\mathcal{Y}$.

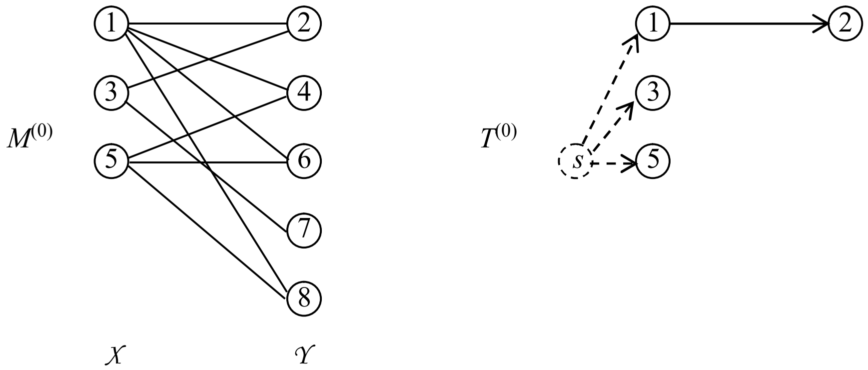


Figura S6.10. L'abbinamento $M^{(0)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(0)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ per la determinazione di $P^{(0)}$.

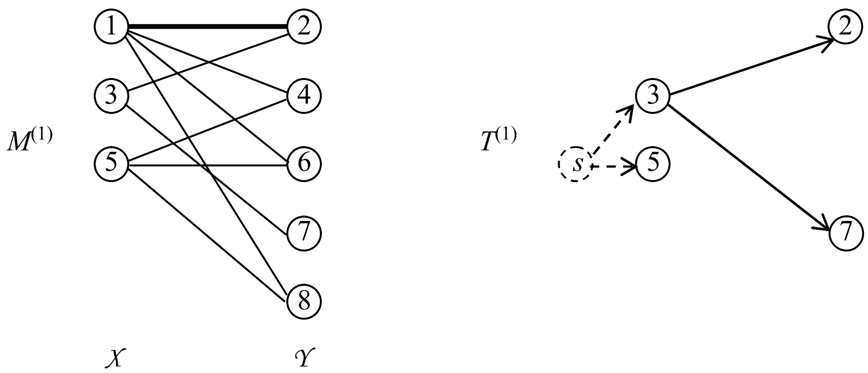


Figura S6.11. L'abbinamento $M^{(1)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ per la determinazione di $P^{(1)}$.

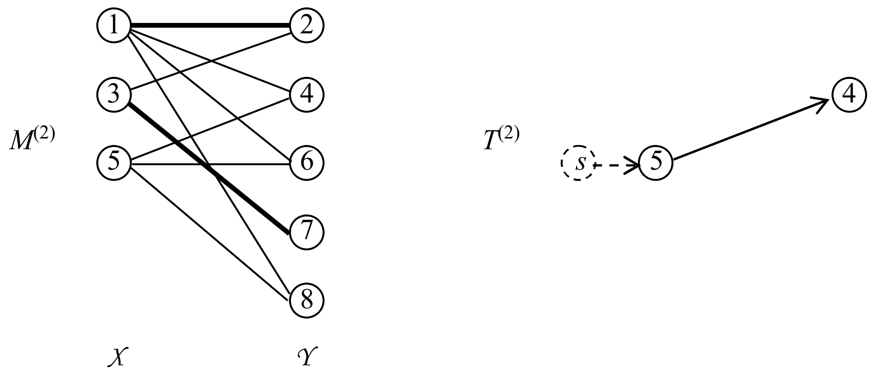


Figura S6.12. L'abbinamento $M^{(2)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(2)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ per la determinazione di $P^{(2)}$.

La Figura S6.13 mostra l'abbinamento finale ottimo $M^* = M^{(3)} = \{(1, 2), (3, 7), (5, 4)\}$ di (massima) cardinalità $|M^*| = 3$ e la ricerca del successivo cammino alternante aumentante da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ che ovviamente termina senza la sua determinazione, verificando che non ne esistono (si veda in figura l'albero di ricerca $T^{(3)}$ dei cammini aumentanti generato da vertici esposti di $\mathcal{X}$), e ritornando l'insieme $S^* = \varnothing$ dei vertici raggiungibili con cammini alternanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$.

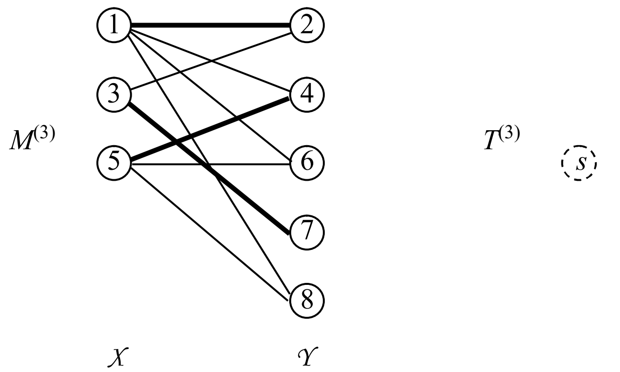


Figura S6.13. L'abbinamento massimo $M^* = M^{(3)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(3)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ da cui si evince la non esistenza di cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$.

Dato l'abbinamento M^*, in base all'insieme $S^* = \varnothing$ dei vertici raggiungibili con cammini alternanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ si individua il seguente minimo insieme ricoprente (vertex cover) $W^* = (\mathcal{X} \backslash S^*) \cup (\mathcal{Y} \cap S^*) = \{1, 3, 5\}$ e da questo il massimo insieme stabile (indipendente) $I^* = (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \backslash W^* = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ del grafo G.

Esercizio 6.5

Consideriamo il grafo non-bipartito $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ in Figura 6.16. Partendo dall'abbinamento $M^{(0)} = \varnothing$, applichiamo l'algoritmo dei cammini alternanti aumentanti con ricerca in ampiezza dei cammini alternanti aumentanti tra nodi esposti di $\mathcal{V}$ (contraendo gli eventuali boccioli individuati) dato l'abbinamento $M^{(k)}$ su G, arrestando la ricerca quando questa fallisce. Si determinano in successione i seguenti cammini alternanti

aumentanti $P^{(k)}$, ottenendo ogni volta un nuovo abbinamento $M^{(k+1)} = M^{(k)} \oplus P^{(k)}$ di cardinalità $|M^{(k)}| + 1$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$:
$P^{(0)} = (1, 2)$;
$P^{(1)} = (3, 4)$;
$P^{(2)} = (5, 6)$;
$P^{(3)} = (7, 8)$;
$P^{(4)} = (9, 10)$.

Le Figure S6.14–S6.18 mostrano gli abbinamenti $M^{(k)}$ e gli alberi di ricerca $T^{(k)}$ generati per trovare i cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, tra nodi esposti di $\mathcal{V}$, interrompendo la ricerca non appena si è determinato un tale cammino.

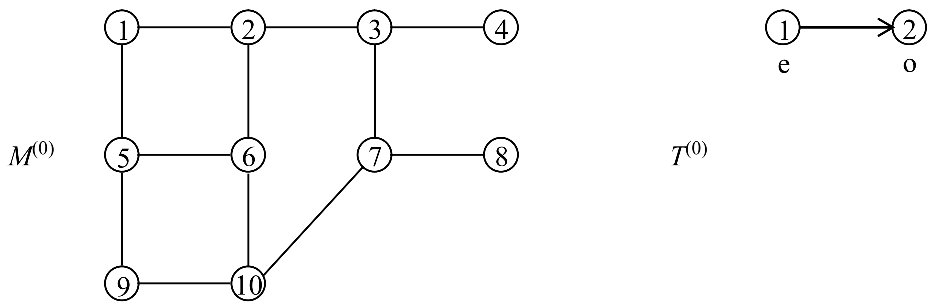


Figura S6.14. L'abbinamento $M^{(0)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(0)}$ dei cammini alternanti aumentanti tra vertici esposti di G per la determinazione di $P^{(0)}$.

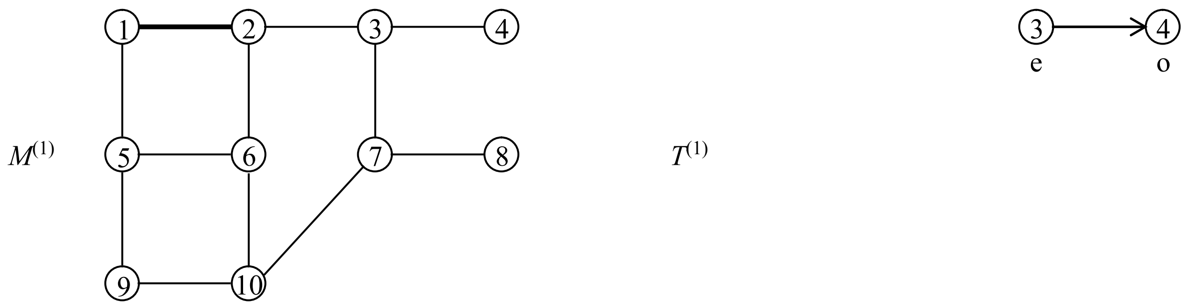


Figura S6.15. L'abbinamento $M^{(1)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini alternanti aumentanti tra vertici esposti di G per la determinazione di $P^{(1)}$.

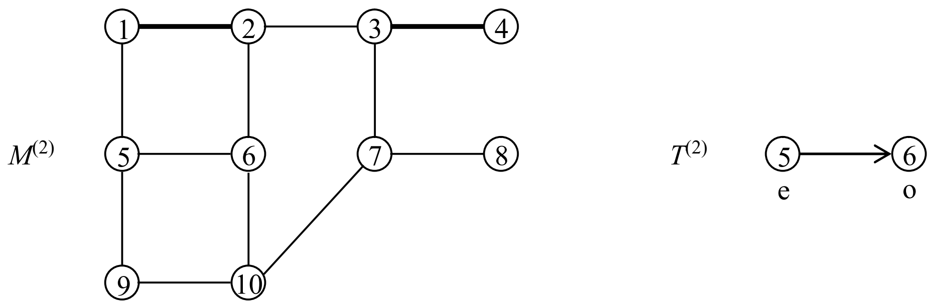


Figura S6.16. L'abbinamento $M^{(2)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(2)}$ dei cammini alternanti aumentanti tra vertici esposti di G per la determinazione di $P^{(2)}$.

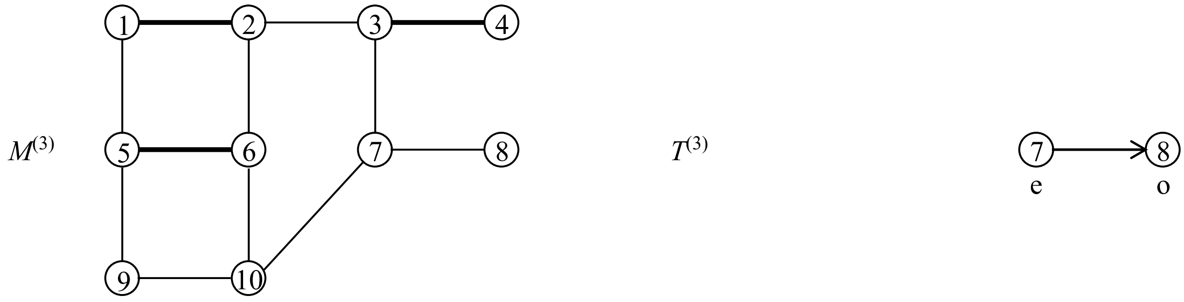


Figura S6.17. L'abbinamento $M^{(3)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(3)}$ dei cammini alternanti aumentanti tra vertici esposti di G per la determinazione di $P^{(3)}$.

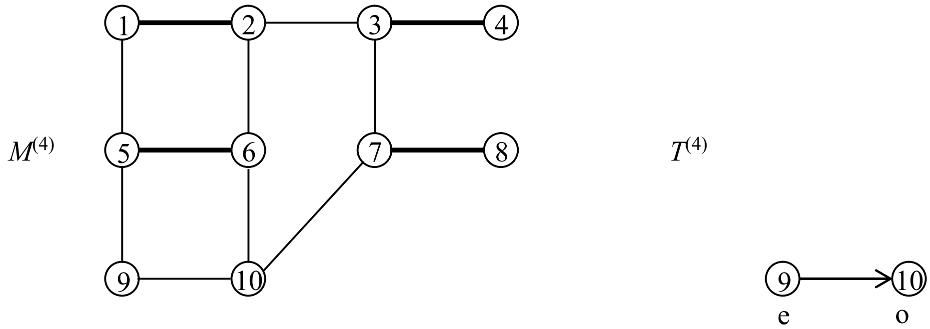


Figura S6.18. L'abbinamento $M^{(4)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(4)}$ dei cammini alternanti aumentanti tra vertici esposti di G per la determinazione di $P^{(4)}$.

La Figura S6.19 mostra l'abbinamento finale ottimo $M^* = M^{(5)} = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10)\}$ di (massima) cardinalità $|M^*| = 5$ e la ricerca del successivo cammino alternante aumentante tra vertici esposti di G che ovviamente termina senza la sua determinazione, verificando che non ne esistono (si riscontri in figura l'inesistenza dell'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini aumentanti generato da vertici esposti in quanto i vertici sono tutti abbinati). In particolare, l'abbinamento M^* è perfetto perché non vi è alcun vertice esposto (tutti i vertici sono abbinati).

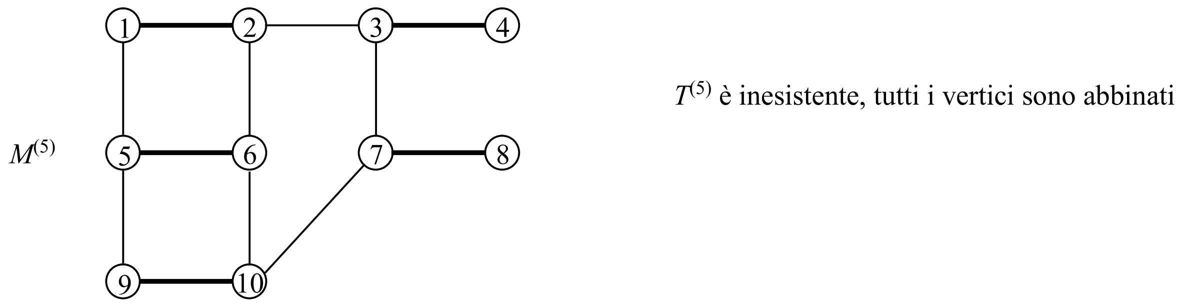


Figura S6.19. L'abbinamento massimo $M^* = M^{(5)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(5)}$ dei cammini alternanti aumentanti tra vertici esposti di G da cui si evince la non esistenza di cammini alternanti aumentanti.

Esercizio 6.6

Consideriamo il grafo non-bipartito $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ in Figura 6.17. Partendo dall'abbinamento iniziale $M^{(0)}$ rappresentato nella figura, applichiamo l'algoritmo dei cammini alternanti aumentanti con ricerca in ampiezza dei cammini alternanti aumentanti tra nodi esposti di $\mathcal{V}$ (contraendo gli eventuali boccioli individuati) dato l'abbinamento $M^{(k)}$ su G, arrestando la ricerca quando questa fallisce. Si determinano in successione i seguenti cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, ottenendo ogni volta un nuovo abbinamento $M^{(k+1)} = M^{(k)} \oplus P^{(k)}$ di cardinalità $|M^{(k)}| + 1$, per $k = 0$: $P^{(0)} = (1, 5, 10, 11, 12, 13, 9, 14)$.

La Figura S6.20 mostra il procedimento di individuazione del cammino alternante aumentante $P^{(0)}$ a partire dall'abbinamento $M^{(0)}$.

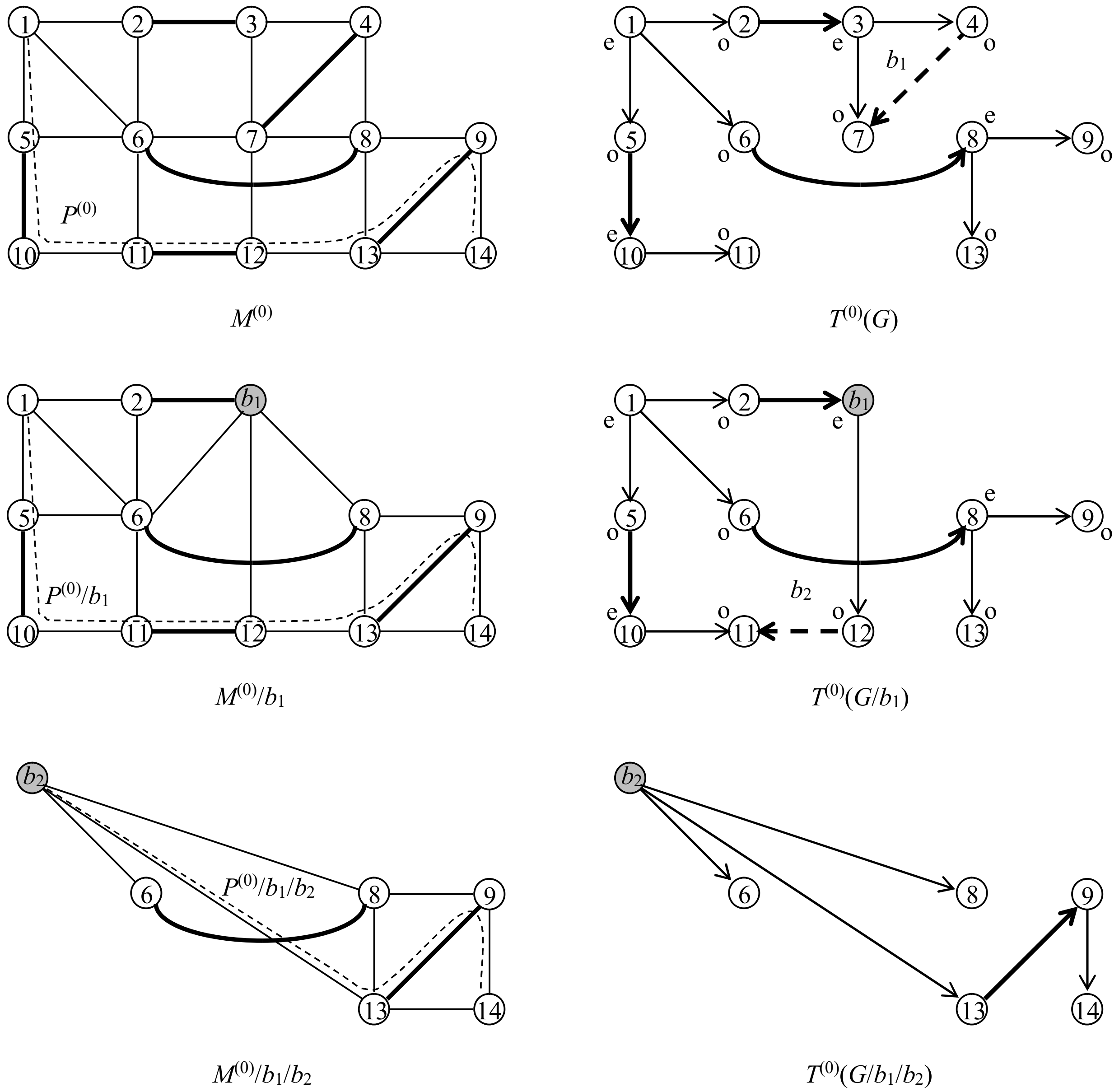
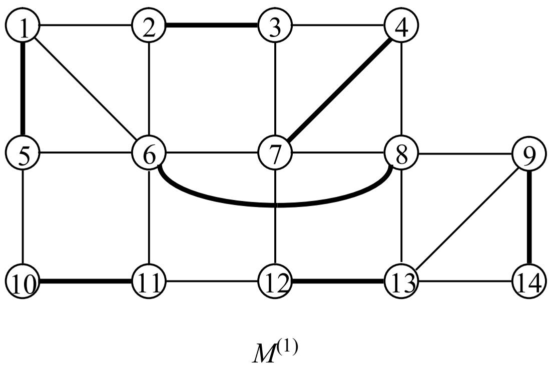


Figura S6.20. La sequenza di contrazioni di G e i relativi abbinamenti nel procedimento di ricerca del cammino alternante aumentante $P^{(0)}$ dal vertice esposto 1 (a sinistra), e i relativi alberi di ricerca (a destra).

La generazione dell'albero di ricerca $T^{(0)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti è interrotta prematuramente quando si individua il bocciolo $b_1 = (3, 4, 7)$. Il grafo G viene quindi contratto nel grafo G/b_1 e il suo abbinamento in $M^{(0)}/b_1$. La generazione dell'albero di ricerca $T^{(0)}/b_1$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti è interrotta prematuramente quando si individua il bocciolo $b_2 = (1, 2, b_1, 12, 11, 10, 5)$. Il grafo G/b_1 viene quindi contratto nel grafo $G/b_1/b_2$ e il suo abbinamento in $M^{(0)}/b_1/b_2$. La generazione dell'albero di ricerca $T^{(0)}/b_1/b_2$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti termina con la determinazione del cammino alternante aumentante $P^{(0)}/b_1/b_2 = (b_2, 13, 9, 14)$ in $G/b_1/b_2$, dato l'abbinamento $M^{(0)}/b_1/b_2$. Espandendo a ritroso i boccioli si ottengono il cammino alternante aumentante $P^{(0)}/b_1 = (1, 5, 10, 11, 12, 13, 9, 14)$ in G/b_1, dato l'abbinamento $M^{(0)}/b_1$, e il cammino alternante aumentante $P^{(0)}$ che coincide con il precedente, ossia $P^{(0)} = (1, 5, 10, 11, 12, 13, 9, 14)$ in G, dato l'abbinamento $M^{(0)}$.

La Figura S6.21 mostra l'abbinamento finale ottimo $M^* = M^{(1)} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 7), (6, 8), (9, 14), (10, 11), (12, 13)\}$ di (massima) cardinalità $|M^*| = 7$ e la ricerca del successivo cammino alternante aumentante tra vertici esposti di G che ovviamente termina senza la sua determinazione, verificando che non ne esistono (si riscontri in figura l'inesistenza dell'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini aumentanti generato da vertici esposti in quanto i vertici sono tutti abbinati). In particolare, l'abbinamento M^* è perfetto perché non vi è alcun vertice esposto (tutti i vertici sono abbinati).



$T^{(1)}$ è inesistente, tutti i vertici sono abbinati

Figura S6.21. L'abbinamento massimo $M^* = M^{(1)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini alternanti aumentanti tra vertici esposti di G da cui si evince la non esistenza di cammini alternanti aumentanti.

Esercizio 6.7

Il grafo bipartito $G = (\mathcal{T} \cup \mathcal{R}, \mathcal{E})$ associato ai possibili abbinamenti è mostrato nel grafo a sinistra in Figura S6.22, dove $\mathcal{T}$ = {EC, IN, ES, SP, TU, CU} sono le 6 aree tematiche e $\mathcal{R}$ = {R1, …, R6} i 6 reporter, e del quale occorre determinare l'abbinamento massimo.

Partendo dall'abbinamento $M^{(0)} = \varnothing$, applichiamo l'algoritmo dei cammini alternanti aumentanti con ricerca in ampiezza dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ dato l'abbinamento $M^{(k)}$ su G, arrestando la ricerca quando questa fallisce. Si determinano in successione i seguenti cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, ottenendo ogni volta un nuovo abbinamento $M^{(k+1)} = M^{(k)} \oplus P^{(k)}$ di cardinalità $|M^{(k)}| + 1$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$:
$P^{(0)}$ = (EC, R2);

$P^{(1)}$ = (IN, R3);
$P^{(2)}$ = (ES, R5);
$P^{(3)}$ = (SP, R6);
$P^{(4)}$ = (TU, R1).

Le Figure S6.22–S6.26 mostrano gli abbinamenti $M^{(k)}$ e gli alberi di ricerca $T^{(k)}$ generati per trovare i cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, per k = 0, 1, 2, 3, 4, da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$, interrompendo la ricerca non appena si visita un vertice esposto di $\mathcal{R}$.

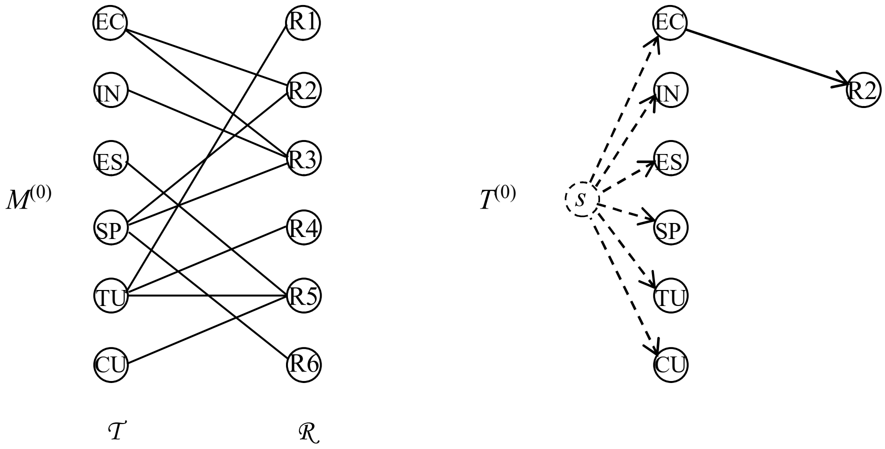


Figura S6.22. L'abbinamento $M^{(0)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(0)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ per la determinazione di $P^{(0)}$.

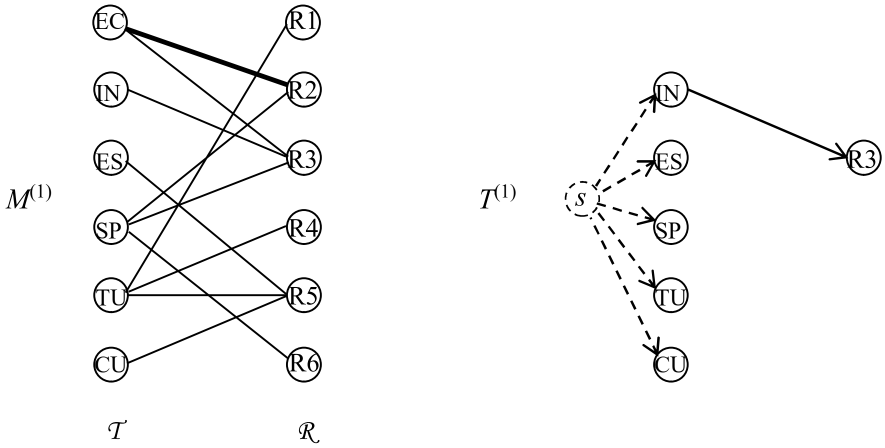


Figura S6.23. L'abbinamento $M^{(1)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ per la determinazione di $P^{(1)}$.

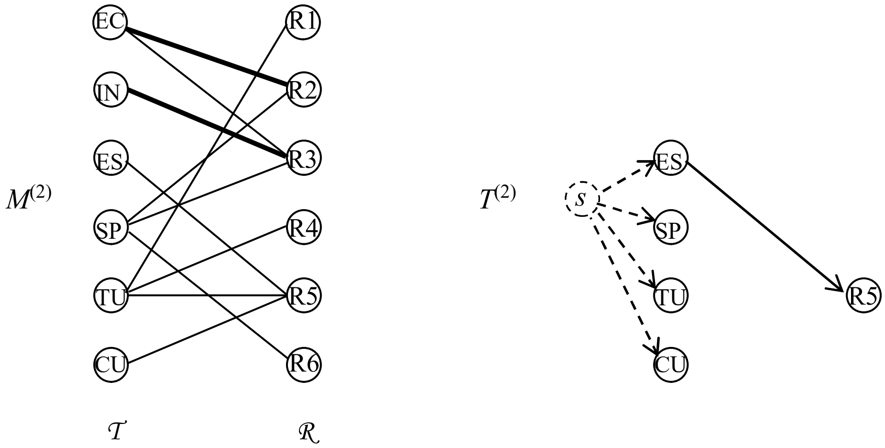


Figura S6.24. L'abbinamento $M^{(2)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(2)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ per la determinazione di $P^{(2)}$.

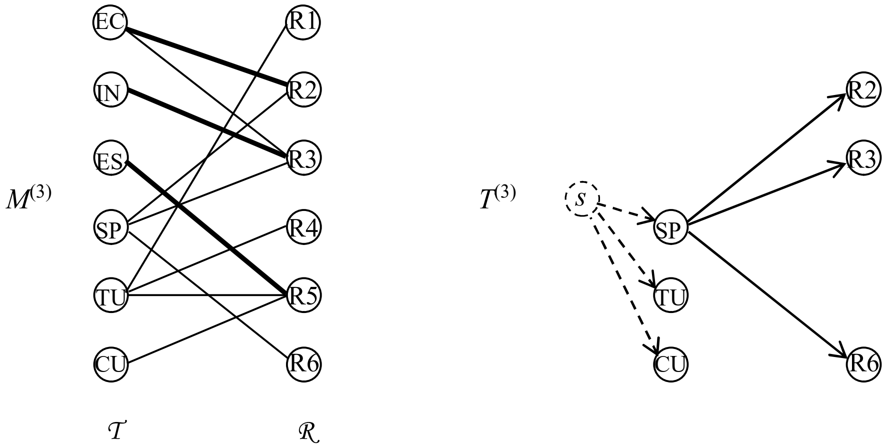


Figura S6.25. L'abbinamento $M^{(3)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(3)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ per la determinazione di $P^{(3)}$.

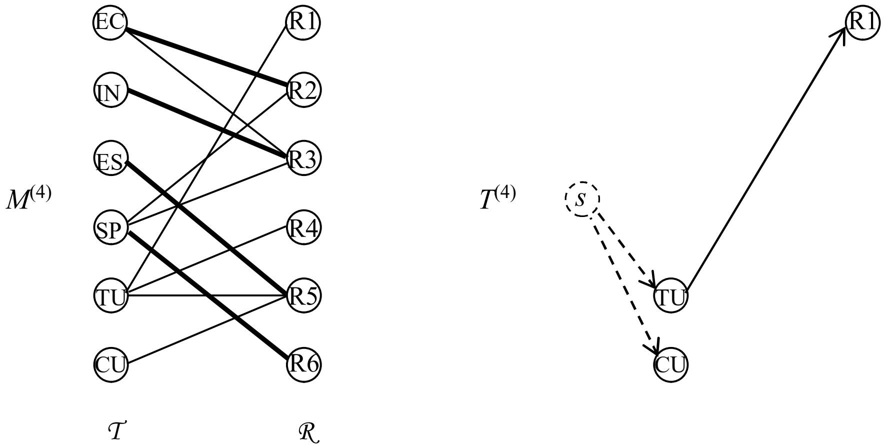


Figura S6.26. L'abbinamento $M^{(4)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(4)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ per la determinazione di $P^{(4)}$.

La Figura S6.27 mostra l'abbinamento finale ottimo $M^* = M^{(5)} = \{$(EC, R2), (IN, R3), (ES, R5), (SP, R6), (TU, R1)$\}$ di (massima) cardinalità $|M^*| = 5$ e la ricerca del successivo cammino alternante aumentante da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ che ovviamente termina senza la sua determinazione (si veda in figura l'albero di ricerca $T^{(5)}$ dei cammini aumentanti generato da vertici esposti di $\mathcal{T}$), verificando che non ne esistono, e ritornando l'insieme S^{*} = {CU, ES, R5} dei vertici raggiungibili con cammini alternanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$.

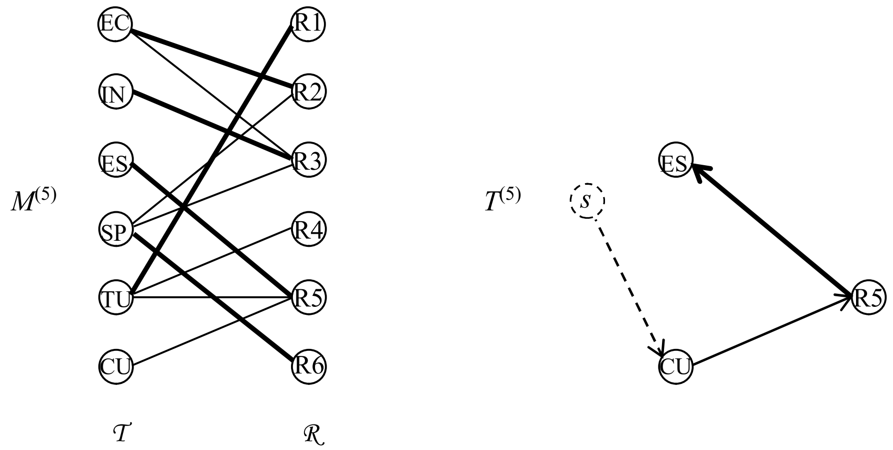


Figura S6.27. L'abbinamento massimo $M^{*} = M^{(5)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(5)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ da cui si evince la non esistenza di cammino alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$.

Non esiste pertanto un abbinamento che consenta di abbinare tutte le aree tematiche in $\mathcal{T}$ (ai reporter). Ciò è confermato dal fatto che l'insieme $Q = \mathcal{T} \cap S^{*}$ = {CU, ES} viola la condizione di Hall, infatti $|Q| = 2 > |N(Q)| = 1$, dove $N(Q)$ = {R5} è l'insieme di vertici adiacenti a vertici di Q.

Esercizio 6.8

Errata corrige:
linea 3 – sostituire "ciascuno" con "qualcuno;
linea 4 – sostituire "solo nei" con "in un giorno tra i";
linea 12 – sostituire "." con ", verificando se sia possibile rispettare i tempi di consegna della commessa.".
linea 13 – eliminare la linea.

Il grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ delle preferenze degli operai è il grafo bipartito rappresentato a sinistra in Figura S6.28.

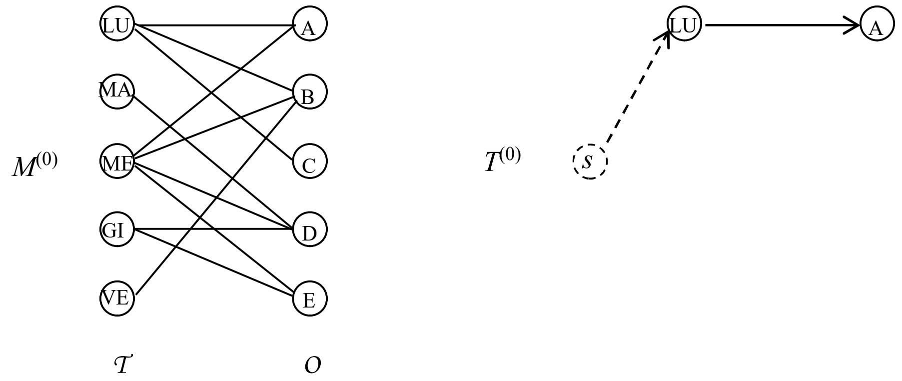


Figura S6.28. L'abbinamento $M^{(0)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(0)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{O}$ per la determinazione di $P^{(0)}$.

L'insieme dei vertici $\mathcal{V} = \mathcal{T} \cup \mathcal{O}$ è partizionato nell'insieme $\mathcal{T}$ = {LU, MA, ME, GI, VE} dei 5 giorni feriali della settimana e nell'insieme $\mathcal{O}$ = {A, B, C, D, E} dei 5 operai. L'insieme degli spigoli, rappresentante le preferenze degli operai, è $\mathcal{E} = \{(i, j) = \mathcal{T} \times \mathcal{O} \mid$ operaio $j \in \mathcal{O}$ è disponibile il giorno $i \in \mathcal{T}\}$.

Partendo dall'abbinamento $M^{(0)} = \varnothing$, applichiamo l'algoritmo dei cammini alternanti aumentanti con ricerca in ampiezza dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{O}$ dato l'abbinamento $M^{(k)}$ su G, arrestando la ricerca quando questa fallisce. Si determinano in successione i seguenti cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, ottenendo ogni volta un nuovo abbinamento $M^{(k+1)} = M^{(k)} \oplus P^{(k)}$ di cardinalità $|M^{(k)}| + 1$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$:
$P^{(0)}$ = (LU, A);
$P^{(1)}$ = (MA, D);
$P^{(2)}$ = (ME, B);
$P^{(3)}$ = (GI, E);
$P^{(4)}$ = (VE, B, ME, A, LU, C).

Le Figure S6.28–S6.32 mostrano gli abbinamenti $M^{(k)}$ e gli alberi di ricerca $T^{(k)}$ generati per trovare i cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{O}$, interrompendo la ricerca non appena si visita un vertice esposto di $\mathcal{O}$.

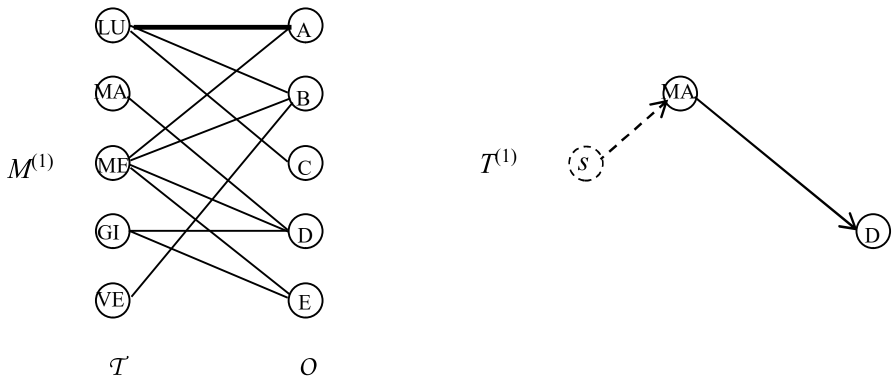


Figura S6.29. L'abbinamento $M^{(1)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{O}$ per la determinazione di $P^{(1)}$.

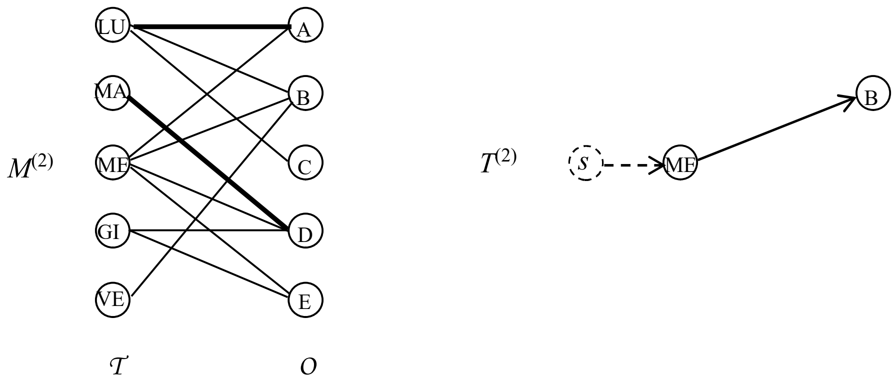


Figura S6.30. L'abbinamento $M^{(2)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(2)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{O}$ per la determinazione di $P^{(2)}$.

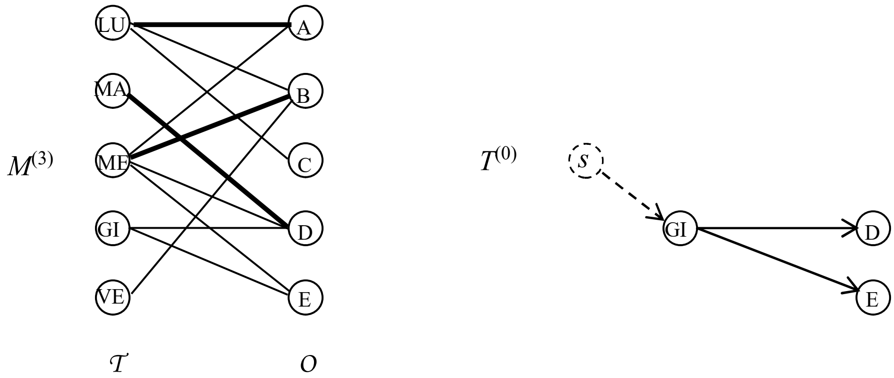


Figura S6.31. L'abbinamento $M^{(3)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(3)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{O}$ per la determinazione di $P^{(3)}$.

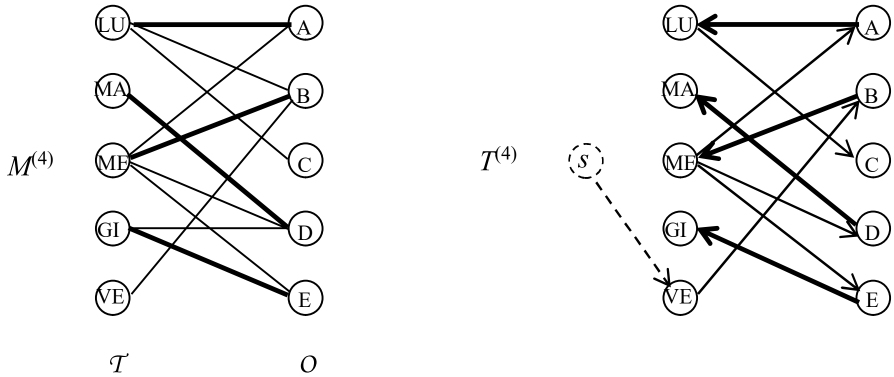


Figura S6.32. L'abbinamento $M^{(4)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(4)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{O}$ per la determinazione di $P^{(4)}$.

La Figura S6.33 mostra l'abbinamento finale ottimo $M^* = M^{(5)} = \{$(LU, C), (MA, D), (ME, A), (GI, E), (VE, B)$\}$ di (massima) cardinalità $|M^*| = 5$ e la ricerca del successivo cammino alternante aumentante da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{O}$ che ovviamente termina senza la sua determinazione (si veda in figura l'albero di ricerca $T^{(5)}$ dei cammini aumentanti generato da vertici esposti di $\mathcal{T}$), verificando che non ne esistono, e ritornando l'insieme $S^* = \varnothing$ dei vertici raggiungibili con cammini alternanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$. Si noti in particolare che l'abbinamento M^* è perfetto.

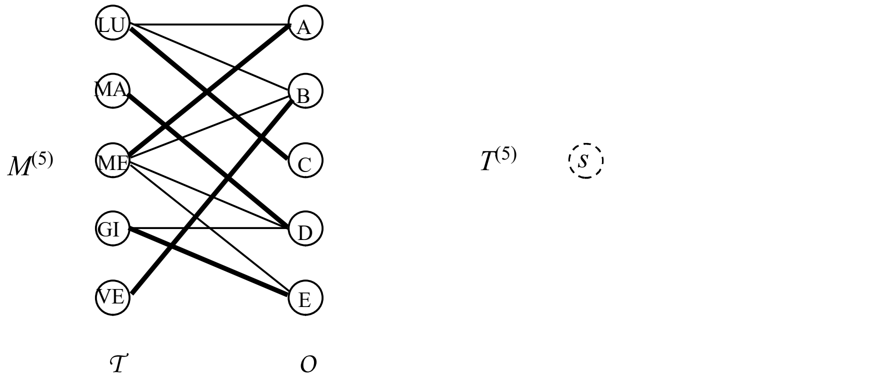


Figura S6.33. L'abbinamento massimo $M^* = M^{(5)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(5)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{O}$ da cui si evince la non esistenza di cammino alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$.

Abbinando operai e giorni di lavorazione secondo l'abbinamento perfetto M^*, si ha quindi la possibilità di impegnare un operaio differente tra i 5 disponibili in ogni giorno di lavorazione della successiva settimana di 5 giorni lavorativi e rispettare quindi i tempi di consegna della commessa.

Esercizio 6.9

Il grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, rappresentato a sinistra in Figura S6.34, rappresenta il problema ed è bipartito. L'insieme dei vertici $\mathcal{V} = \mathcal{T} \cup \mathcal{R}$ è partizionato nell'insieme $\mathcal{T}$ = {T1, T2, T3, T4, T5} dei 5 tirocinanti e nell'insieme $\mathcal{R}$ = {SA, SU, BI, GA, CA} dei 5 operai. In base alla Tabella 6.2, l'insieme degli spigoli, rappresentante i reparti in cui i tirocinanti devono svolgere periodi di attività, è $\mathcal{E} = \{(i, j) = \mathcal{T} \times \mathcal{R} \mid$ tirocinante $i \in \mathcal{T}$ deve svolgere attività nel reparto $j \in \mathcal{R}\}$.

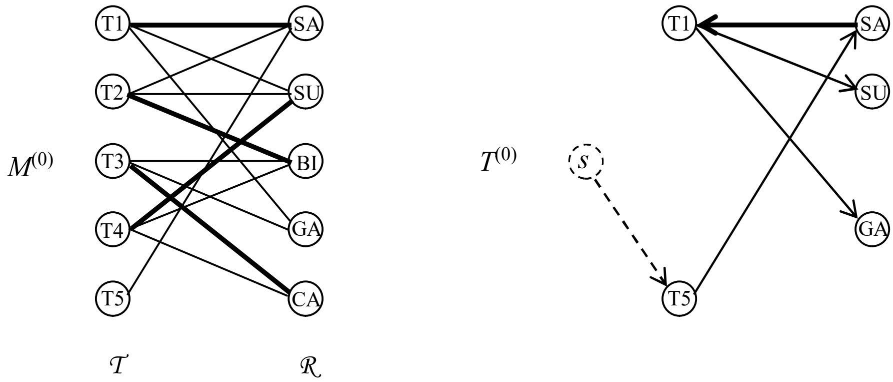


Figura S6.34. L'abbinamento $M^{(0)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(0)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ per la determinazione di $P^{(0)}$.

Partendo dal dato abbinamento $M^{(0)}$, rappresentato in Figura S6.34, applichiamo l'algoritmo dei cammini alternanti aumentanti con ricerca in ampiezza dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ dato l'abbinamento $M^{(k)}$ su G, arrestando la ricerca quando questa fallisce. Si determinano in successione i seguenti cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, ottenendo ogni volta un nuovo abbinamento $M^{(k+1)} = M^{(k)} \oplus P^{(k)}$ di cardinalità $|M^{(k)}| + 1$, per $k = 0$:
$P^{(0)}$ = (T5, SA, T1, GA).

La Figura S6.34 mostra l'abbinamento $M^{(0)}$ e l'albero di ricerca $T^{(0)}$ generato per trovare il cammino alternante aumentante $P^{(0)}$ da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$, interrompendo la ricerca non appena si visita un vertice esposto di $\mathcal{R}$.

La Figura S6.35 mostra l'abbinamento finale ottimo $M^* = M^{(1)}$ = {(T1, GA), (T2, BI), (T3, CA), (T4, SU), (T5, SA)} di (massima) cardinalità $|M^*| = 5$ e la ricerca del successivo cammino alternante aumentante da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ che ovviamente termina senza la sua determinazione (si veda in figura l'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini aumentanti generato da vertici esposti di $\mathcal{T}$), verificando che non ne esistono, e ritornando l'insieme $S^* = \varnothing$ dei vertici raggiungibili con cammini alternanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$. Si noti in particolare che l'abbinamento M^* è perfetto.

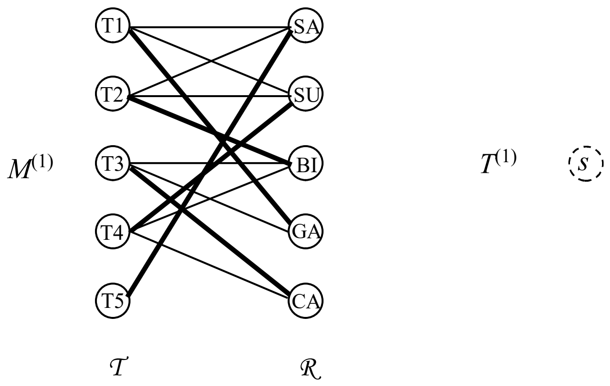


Figura S6.35. L'abbinamento massimo $M^* = M^{(1)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$ a vertici esposti di $\mathcal{R}$ da cui si evince la non esistenza di cammino alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{T}$.

Abbinando tirocinanti e reparti secondo l'abbinamento perfetto M^*, si ha quindi la possibilità di programmare le attività di tirocinio per la prossima settimana in modo che ciascuno dei 5 tirocinanti effettuerà un'attività di tirocinio in uno dei reparti in cui deve ancora svolgere il periodo di attività.

Esercizio 6.10

Dato il grafo bipartito $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, rappresentato in Figura 6.18 con $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ rispettivamente i sottoinsiemi dei vertici a sinistra e dei vertici a destra della partizione, determiniamo un abbinamento massimo.

Partendo dall'abbinamento $M^{(0)} = \emptyset$, applichiamo l'algoritmo dei cammini alternanti aumentanti con ricerca in ampiezza dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ dato l'abbinamento $M^{(k)}$ su G, arrestando la ricerca quando questa fallisce. Si determinano in successione i seguenti cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, ottenendo ogni volta un nuovo abbinamento $M^{(k+1)} = M^{(k)} \oplus P^{(k)}$ di cardinalità $|M^{(k)}| + 1$, per $k = 0, 1, 2, 3$:
$P^{(0)} = (x_1, y_1)$;
$P^{(1)} = (x_2, y_2)$;
$P^{(2)} = (x_3, y_4)$;
$P^{(3)} = (x_4, y_3)$.

Le Figure S6.36–S6.39 mostrano gli abbinamenti $M^{(k)}$ e gli alberi di ricerca $T^{(k)}$ generati per trovare i cammini alternanti aumentanti $P^{(k)}$, per $k = 0, 1, 2, 3$, da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$, interrompendo la ricerca non appena si visita un vertice esposto di $\mathcal{Y}$.

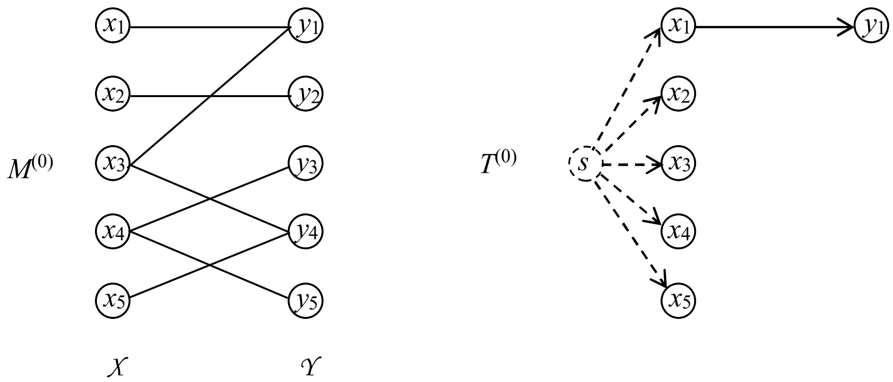


Figura S6.36. L'abbinamento $M^{(0)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(0)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di X a vertici esposti di Y per la determinazione di $P^{(0)}$.

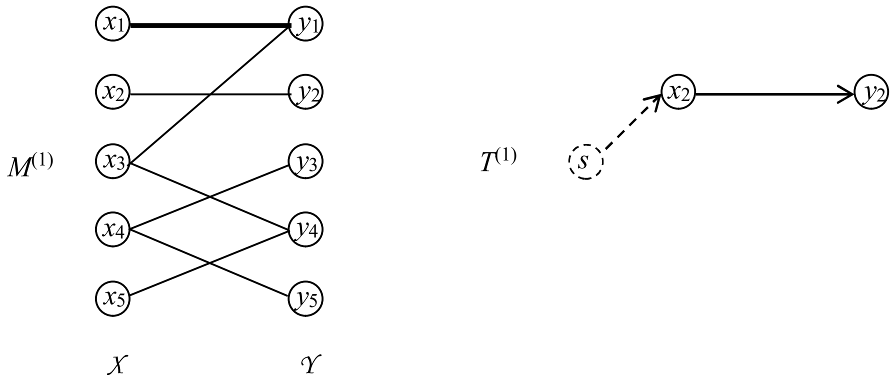


Figura S6.37. L'abbinamento $M^{(1)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(1)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di X a vertici esposti di Y per la determinazione di $P^{(1)}$.

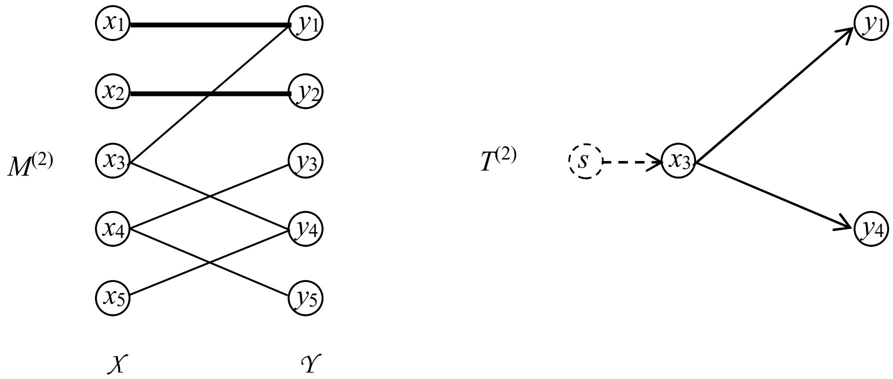


Figura S6.38. L'abbinamento $M^{(2)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(2)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di X a vertici esposti di Y per la determinazione di $P^{(2)}$.

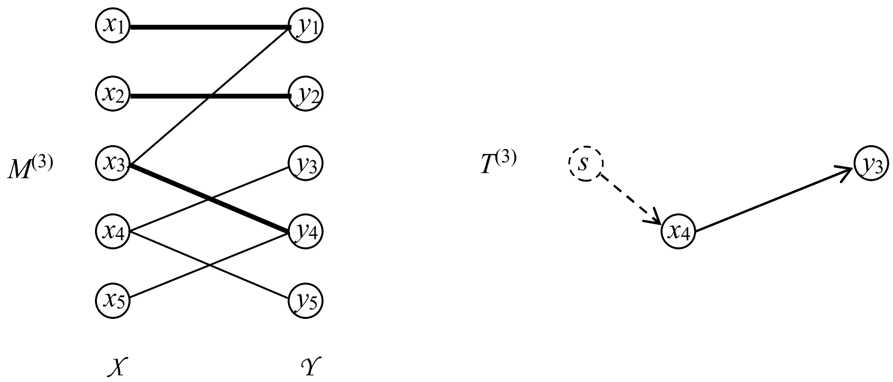


Figura S6.39. L'abbinamento $M^{(3)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(3)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ per la determinazione di $P^{(3)}$.

La Figura S6.40 mostra l'abbinamento finale ottimo $M^* = M^{(4)}$ di (massima) cardinalità $|M^*| = 4$ e la ricerca del successivo cammino alternante aumentante da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ che ovviamente termina senza la sua determinazione (si veda in figura l'albero di ricerca $T^{(4)}$ dei cammini aumentanti generato da vertici esposti di $\mathcal{X}$), verificando che non ne esistono, e ritornando l'insieme $S^* = \{x_1, x_3, x_5, y_1, y_4\}$ dei vertici raggiungibili con cammini alternanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$.

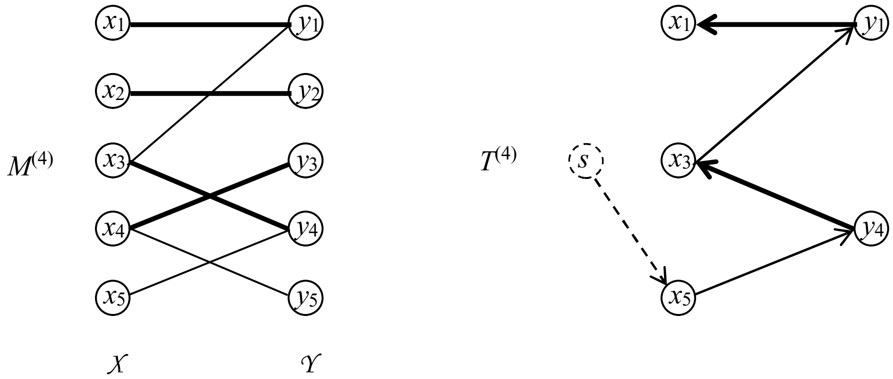


Figura S6.40. L'abbinamento massimo $M^* = M^{(4)}$ su G e l'albero di ricerca $T^{(4)}$ dei cammini alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$ a vertici esposti di $\mathcal{Y}$ da cui si evince la non esistenza di cammino alternanti aumentanti da vertici esposti di $\mathcal{X}$.

Visto che $S^* \neq \varnothing$ non è possibile abbinare tutti i vertici di $\mathcal{X}$, e quindi non è possibile ottenere un abbinamento perfetto.

L'abbinamento M^* di Figura S6.40 non è l'unico abbinamento massimo di G. I due cammini alternanti $P^a = (x_5, y_4, x_3, y_1, x_1)$ e $P^b = (y_5, x_4, y_3)$ permettono di determinare altri abbinamenti massimi. In particolare, i distinti abbinamenti massimi sono infatti 2^q dove $q = 2$ sono i distinti cammini alternanti massimali P^a e P^b in G dato l'abbinamento massimo M^*. Indicando con $M_1 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_3)\}$ l'abbinamento massimo M^* di Figura S6.40, gli altri 3 distinti abbinamenti massimi sono $M_2 = M_1 \oplus P^a = \{(x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_4, y_3), (x_5, y_4)\}$, $M_3 = M_1 \oplus P^b = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_5)\}$, $M_4 = M_2 \oplus P^b = \{(x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_4, y_5), (x_5, y_4)\}$.