

**Esercizi proposti nel Cap. 8 - Soluzioni**

**Esercizio 8.1**

Sia  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  il grafo non orientato mostrato in Figura 8.12 e pesato sugli spigoli, con pesi (costi)  $c_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ . Introducendo la variabile  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , il problema del minimo albero ricoprente può essere formulato nel seguente modo:

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} c_{ij} x_{ij}$$

s. v.

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} x_{ij} &= |\mathcal{V}| - 1 \\ \sum_{(i,j) \in (S, \mathcal{V} \setminus S)} x_{ij} &\geq 1, \emptyset \subset S \subset \mathcal{V}, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, (i, j) \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

cioè:

$$\min z(\mathbf{x}) = 5 x_{12} + 7 x_{13} + 6 x_{14} + 4 x_{25} + 5 x_{34} + 5 x_{35} + 6 x_{36} + 8 x_{46} + 7 x_{56}$$

s. v.

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{25} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{46} + x_{56} &= 5 \\ \sum_{(i,j) \in (S, \mathcal{V} \setminus S)} x_{ij} &\geq 1, \emptyset \subset S \subset \mathcal{V}, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, (i, j) \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

oppure nel seguente:

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} c_{ij} x_{ij}$$

s. v.

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} x_{ij} &= |\mathcal{V}| - 1 \\ \sum_{(i,j) \in \sigma(S)} x_{ij} &\leq |S| - 1, \emptyset \subset S \subset \mathcal{V}, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, (i, j) \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

cioè:

$$\min z(\mathbf{x}) = 5 x_{12} + 7 x_{13} + 6 x_{14} + 4 x_{25} + 5 x_{34} + 5 x_{35} + 6 x_{36} + 8 x_{46} + 7 x_{56}$$

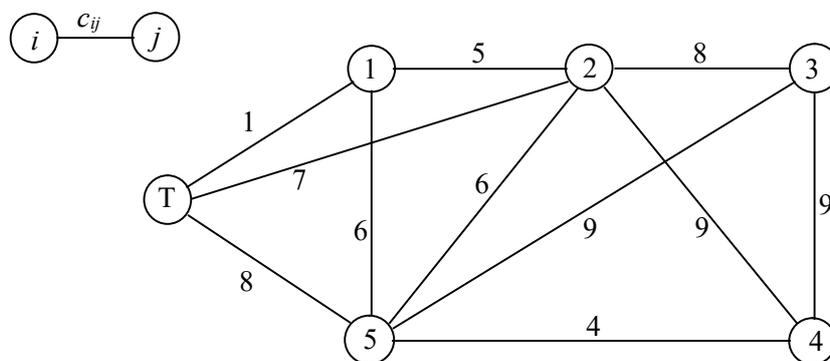
s. v.

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{25} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{46} + x_{56} &= 5 \\ \sum_{(i,j) \in \sigma(S)} x_{ij} &\leq |S| - 1, \emptyset \subset S \subset \mathcal{V}, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, (i, j) \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

N.B.: I vincoli di taglio della prima formulazione e di aciclicità della seconda sono  $2^{|\mathcal{V}|} - 2$ , cioè 62 nel caso specifico.

## Esercizio 8.2

La rete di potenziali tratti di gasdotti elencati in Tabella 8.1 unitamente ai relativi costi, è rappresentata dal grafo non orientato  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , mostrato in Figura S8.1, con pesi (costi in migliaia di Euro)  $c_{ij}$  associati agli spigoli  $(i, j) \in \mathcal{E}$ .



**Figura S8.1.** Rappresentazione di  $G$ .

Il problema consiste nel determinare il sottografo ricoprente connesso di costo minimo di  $G$ . Essendo i costi non negativi, il sottografo soluzione sarà aciclico, quindi il problema è equivalente a determinare l'albero ricoprente di costo minimo di  $G$ .

Introducendo la variabile  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , la formulazione del problema è la seguente.

$$\begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. v.} \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} x_{ij} &= |\mathcal{V}| - 1 \\ \sum_{(i,j) \in \sigma(S)} x_{ij} &\leq |S| - 1, \quad \emptyset \subset S \subset \mathcal{V}, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

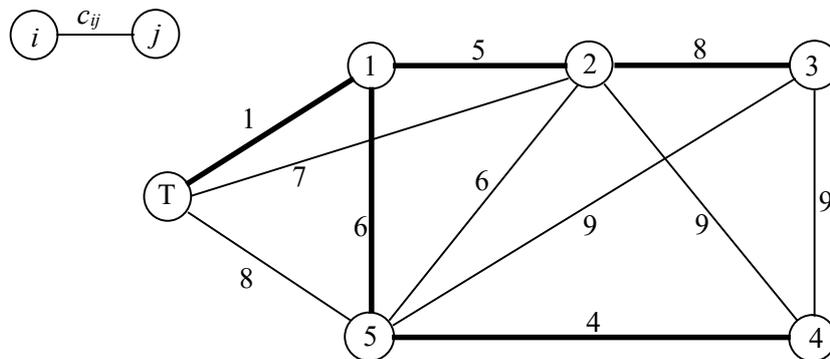
cioè:

$$\begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= x_{T1} + 7 x_{T2} + 8 x_{T5} + 5 x_{12} + 6 x_{15} + 8 x_{23} + 9 x_{24} + 6 x_{25} + 9 x_{34} + 9 x_{35} + 4 x_{45} \\ \text{s. v.} \\ x_{T1} + x_{T2} + x_{T5} + x_{12} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{34} + x_{35} + x_{45} &= 5 \\ \sum_{(i,j) \in \sigma(S)} x_{ij} &\leq |S| - 1, \quad \emptyset \subset S \subset \mathcal{V}, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Risolviamo il problema con l'algoritmo di Prim-Dijkstra. La seguente tabella riporta il dettaglio dell'algoritmo: all'interno di ogni cella della riga associata alla lista  $L$  è riportato il contenuto di  $L$  all'inizio dell'iterazione; nelle successive righe, all'interno di ogni cella della riga associata al nodo  $i$  è riportata la coppia  $(\varepsilon_i; \text{pred}(i))$ ; la cella asteriscata indica il nodo (associato alla riga) selezionato nell'iterazione (associata alla colonna).

Algoritmo di Prim-Dijkstra: iterazioni						
	1°	2°	3°	4°	5°	6°
$L$	{T}	{1, 2, 5}	{2, 5}	{3, 4, 5}	{3, 4}	{3}
T	*					
1	1; T	*				
2	7; T	5; 1	*			
3			8; 2			*
4			9; 2	4; 5	*	
5	8; T	6; 1		*		

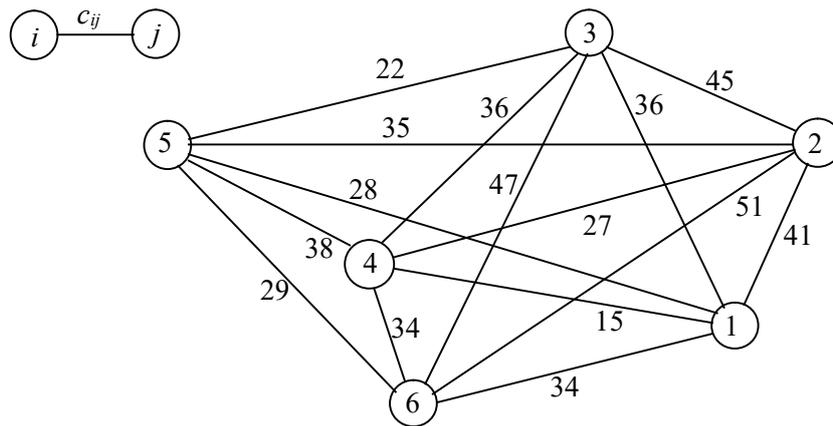
Attraverso il vettore finale **pred** dei predecessori si individua l'albero ricoprente di costo minimo mostrato in Figura S8.2, di costo  $c(T^*) = 24$  (migliaia di Euro).



**Figura S8.2.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*$  di  $G$  determinato l'algoritmo di Prim-Dijkstra.

### Esercizio 8.3

La potenziale rete a banda larga è rappresentata dal grafo non orientato  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  mostrato in Figura S8.3, con pesi (costi)  $c_{ij}$  associati agli spigoli  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , rappresentanti i costi (in migliaia di Euro) di realizzazione delle connessioni tra coppie di punti chiave della rete, dove: il vertice 1 rappresenta “Piazza San Marco”; il vertice 2 rappresenta “Canal Grande”; il vertice 3 rappresenta “Piazza San Marco”; il vertice 4 rappresenta “Campo Santa Margherita”; il vertice 5 rappresenta “Piazzale Roma”; il vertice 6 rappresenta “Dorsoduro”.

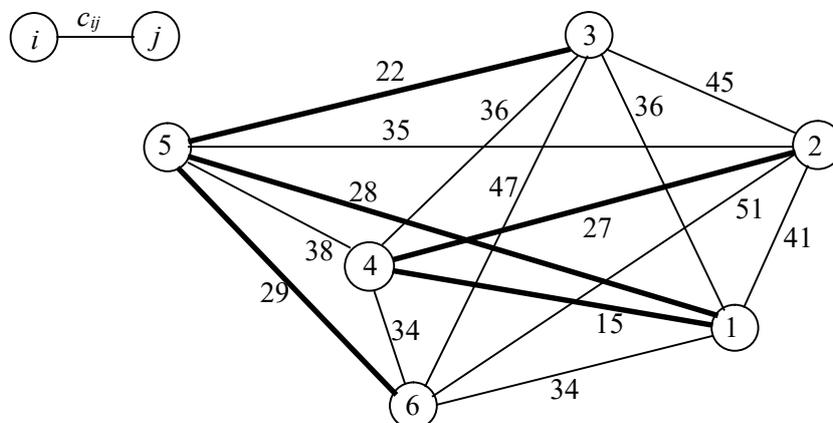


**Figura S8.3.** Rappresentazione di  $G$ .

Il problema consiste nel determinare il sottografo ricoprente connesso di costo minimo di  $G$ . Essendo i costi non negativi, il sottografo soluzione sarà aciclico, quindi il problema è equivalente a determinare l'albero ricoprente di costo minimo di  $G$ . La seguente tabella mostra l'esecuzione dell'algoritmo di Kruskal.

<i>iter</i>	$(i, j) \in E$	componenti connesse non banali
1	(1, 4)	{1, 4}
2	(3, 5)	{1, 4}; {3, 5}
3	(2, 4)	{1, 2, 4}; {3, 5}
4	(1, 5)	{1, 2, 3, 4, 5}
5	(5, 6)	{1, 2, 3, 4, 5, 6}

L'insieme degli spigoli aggiunti nelle varie iterazioni dell'algoritmo individua l'insieme degli spigoli dell'albero ricoprente di costo minimo mostrato in Figura S8.4, di costo  $c(T^*) = 121$  (in migliaia di Euro), che identifica la rete che consente di collegare le diverse zone chiave al minor costo possibile.



**Figura S8.4.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*$  di  $G$  determinato con l'algoritmo di Kruskal

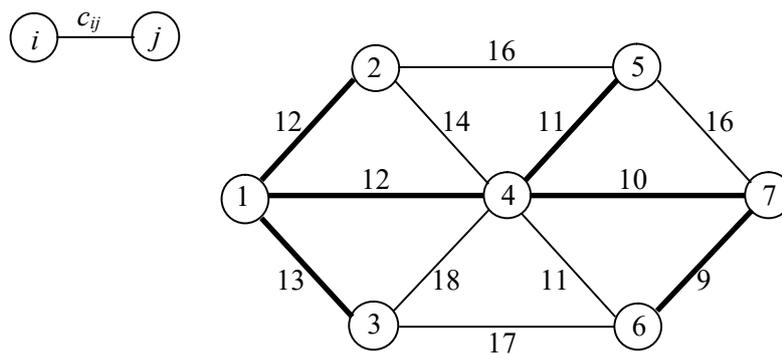
### Esercizio 8.4

Sia  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  il grafo non orientato mostrato in Figura 8.13 e pesato sugli spigoli, con pesi (costi)  $c_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ .

Risolvi il problema del minimo albero ricoprente con l'algoritmo di Prim nella versione Prim-Dijkstra. La seguente tabella riporta il dettaglio dell'algoritmo: all'interno di ogni cella della riga associata alla lista  $L$  è riportato il contenuto di  $L$  all'inizio dell'iterazione; nelle successive righe, all'interno di ogni cella della riga associata al nodo  $i$  è riportata la coppia  $(\varepsilon_i; \text{pred}(i))$ ; la cella asteriscata indica il nodo (associato alla riga) selezionato nell'iterazione (associata alla colonna).

Algoritmo di Prim-Dijkstra: iterazioni							
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
$L$	{1}	{2, 3, 4}	{3, 4, 5}	{3, 5, 6, 7}	{3, 5, 6}	{3, 5}	{3}
1	*						
2	12; 1	*					
3	13; 1						*
4	12; 1		*				
5		16; 2	11; 4			*	
6			11; 4	9; 7	*		
7			10; 4	*			

Attraverso il vettore finale **pred** dei predecessori si individua l'albero ricoprente di costo minimo mostrato in Figura S8.5, di costo  $c(T^*) = 67$ .

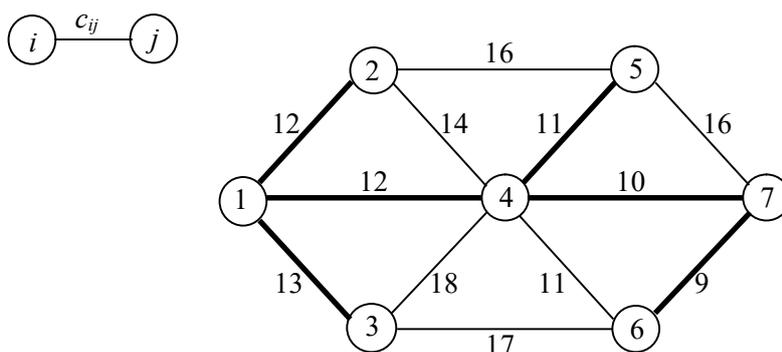


**Figura S8.5.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*$  di  $G$  determinato con l'algoritmo di Prim-Dijkstra.

Risolvi il problema del minimo albero ricoprente con l'algoritmo di Kruskal: la seguente tabella mostra l'esecuzione dell'algoritmo.

<i>iter</i>	$(i, j) \in E$	componenti connesse non banali
1	(6, 7)	{6, 7}
2	(4, 7)	{4, 6, 7}
3	(4, 5)	{4, 5, 6, 7}
4	<del>(4, 6)</del>	
5	(1, 2)	{1, 2}; {4, 5, 6, 7}
6	(1, 4)	{1, 2, 4, 5, 6, 7}
7	(1, 3)	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

L'insieme degli spigoli aggiunti nelle varie iterazioni dell'algoritmo individua l'insieme degli spigoli dell'albero ricoprente di costo minimo mostrato in Figura S8.6, di costo  $c(T^*) = 67$ .



**Figura S8.6.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*$  di  $G$  determinato con l'algoritmo di Kruskal.

Le due soluzioni ottime coincidono (in questo caso). Certifichiamone l'ottimalità. Applichiamo le condizioni di ottimalità sui cammini (sui cicli fondamentali), verificando che il costo  $c_{ij} \geq \max_{(p,q) \in P_{ij}(T^*)} \{c_{pq}\}$ , per ogni spigolo  $(i, j) \in E \setminus E(T^*)$ , dove  $P_{ij}(T^*)$  è il cammino da  $i$  a  $j$  in  $T^*$ :

- (2, 4):  $c_{24} \geq \max\{c_{12}, c_{14}\}$ , ossia  $14 \geq 12$ , sì;
- (2, 5):  $c_{25} \geq \max\{c_{12}, c_{14}, c_{45}\}$ , ossia  $16 \geq 12$ , sì;
- (3, 4):  $c_{34} \geq \max\{c_{12}, c_{14}\}$ , ossia  $18 \geq 13$ , sì;
- (3, 6):  $c_{36} \geq \max\{c_{13}, c_{14}, c_{47}, c_{67}\}$ , ossia  $17 \geq 13$ , sì;
- (4, 6):  $c_{46} \geq \max\{c_{47}, c_{67}\}$ , ossia  $11 \geq 10$ , sì;
- (5, 7):  $c_{57} \geq \max\{c_{45}, c_{47}\}$ , ossia  $16 \geq 11$ , sì.

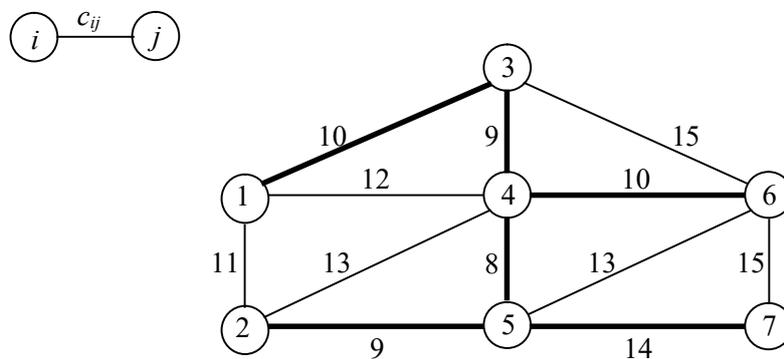
### Esercizio 8.5

Sia  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  il grafo non orientato mostrato in Figura 8.14 e pesato sugli spigoli, con pesi (costi)  $c_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ .

Risolviamo il problema del minimo albero ricoprente con l'algoritmo di Prim nella versione Prim-Dijkstra. La seguente tabella riporta il dettaglio dell'algoritmo: all'interno di ogni cella della riga associata alla lista  $L$  è riportato il contenuto di  $L$  all'inizio dell'iterazione; nelle successive righe, all'interno di ogni cella della riga associata al nodo  $i$  è riportata la coppia  $(\varepsilon_i; pred(i))$ ; la cella asteriscata indica il nodo (associato alla riga) selezionato nell'iterazione (associato alla colonna).

Algoritmo di Prim-Dijkstra: iterazioni							
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
$L$	{1}	{2, 3, 4}	{2, 4, 6}	{2, 5, 6}	{2, 6, 7}	{6, 7}	{7}
1	*						
2	11; 1			9; 5	*		
3	10; 1	*					
4	12; 1	9; 3	*				
5			8; 4	*			
6		15; 3	10; 4			*	
7				14; 5			*

Attraverso il vettore finale **pred** dei predecessori si individua l'albero ricoprente di costo minimo mostrato in Figura S8.7, di costo  $c(T^*) = 60$ .



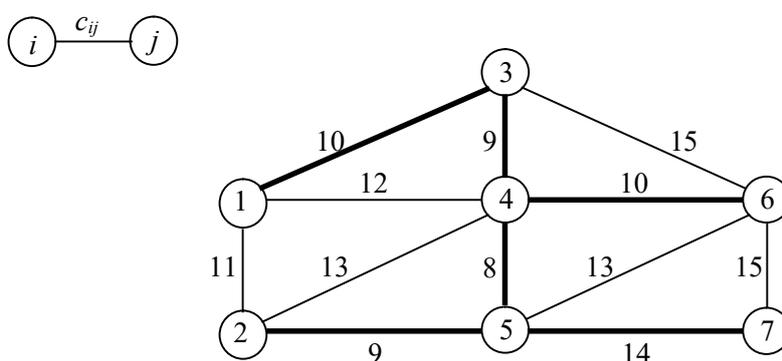
**Figura S8.7.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*$  di  $G$  determinato con l'algoritmo di Prim-Dijkstra.

Risolviamo il problema del minimo albero ricoprente con l'algoritmo di Kruskal: la seguente tabella mostra l'esecuzione dell'algoritmo.

$iter$	$(i, j) \in E$	componenti connesse non banali
1	(4, 5)	{4, 5}
2	(2, 5)	{2, 4, 5}
3	(3, 4)	{2, 3, 4, 5}
4	(1, 3)	{1, 2, 3, 4, 5}

5	(4, 6)	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
6	<del>(1, 2)</del>	
7	<del>(2, 4)</del>	
8	<del>(5, 6)</del>	
9	(5, 7)	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

L'insieme degli spigoli aggiunti nelle varie iterazioni dell'algoritmo individua l'insieme degli spigoli dell'albero ricoprente di costo minimo mostrato in Figura S8.8, di costo  $c(T^*) = 60$ .



**Figura S8.8.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*$  di  $G$  determinato con l'algoritmo di Kruskal.

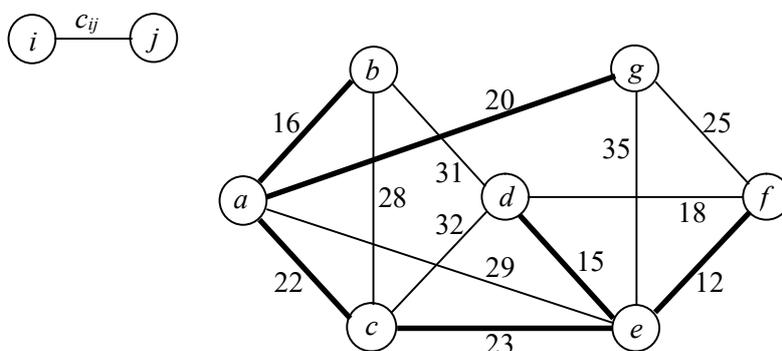
Le due soluzioni ottime coincidono (in questo caso). Certifichiamone l'ottimalità. Applichiamo le condizioni di ottimalità sui tagli, verificando che il costo  $c_{ij} \leq \min_{(p,q) \in (\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) \setminus \{(i,j)\}} \{c_{pq}\}$ , per ogni spigolo  $(i, j) \in \mathcal{E}(T^*)$ , dove  $(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j)$  è il taglio fondamentale associato allo spigolo  $(i, j)$ :

- (1, 3):  $c_{13} \leq \min\{c_{12}, c_{14}\}$ , ossia  $10 \leq 11$ , sì;
- (2, 5):  $c_{25} \leq \min\{c_{12}, c_{24}\}$ , ossia  $9 \leq 11$ , sì;
- (3, 4):  $c_{34} \leq \min\{c_{12}, c_{14}\}$ , ossia  $9 \leq 11$ , sì;
- (4, 5):  $c_{45} \leq \min\{c_{12}, c_{42}, c_{56}, c_{67}\}$ , ossia  $8 \leq 11$ , sì;
- (4, 6):  $c_{46} \leq \min\{c_{36}, c_{56}, c_{67}\}$ , ossia  $10 \leq 13$ , sì;
- (5, 7):  $c_{57} \leq c_{67}$ , ossia  $14 \leq 15$ , sì.

### Esercizio 8.6

Sia dato il grafo  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  con  $\mathcal{V} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  e pesato sugli spigoli, con pesi (costi)  $c_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$  dati dalla Tabella 8.3. Visto che gli archi appaiono nella tabella in ordine non decrescente dei loro costi, conviene applicare l'algoritmo di Kruskal per determinare il minimo albero ricoprente di  $G$ . La seguente tabella mostra l'esecuzione dell'algoritmo.

<i>iter</i>	$(i, j) \in E$	componenti connesse non banali
1	$(e, f)$	$\{e, f\}$
2	$(d, e)$	$\{d, e, f\}$
3	$(a, b)$	$\{a, b\}; \{d, e, f\}$
4	<del><math>(d, f)</math></del>	
5	$(a, g)$	$\{a, b, g\}; \{d, e, f\}$
6	$(a, c)$	$\{a, b, c, g\}; \{d, e, f\}$
7	$(c, e)$	$\{a, b, c, d, e, f, g\}$



**Figura S8.9.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*$  di  $G$  determinato con l'algoritmo di Kruskal.

L'insieme degli spigoli aggiunti nelle varie iterazioni dell'algoritmo individua l'insieme degli spigoli dell'albero ricoprente di peso minimo mostrato in Figura S8.9, di costo  $c(T^*) = 108$ . Certificiamone l'ottimalità. Applichiamo le condizioni di ottimalità sui cammini (sui cicli fondamentali), verificando che il costo  $c_{ij} \geq \max_{(p,q) \in P_{ij}(T^*)} \{c_{pq}\}$ , per ogni spigolo  $(i, j) \in E \setminus E(T^*)$ , dove  $P_{ij}(T^*)$  è il cammino da  $i$  a  $j$  in  $T^*$ :

- $(a, e)$ :  $c_{ae} \geq \max\{c_{ac}, c_{ce}\}$ , ossia  $29 \geq 23$ , sì;
- $(b, c)$ :  $c_{bc} \geq \max\{c_{ab}, c_{ac}\}$ , ossia  $28 \geq 22$ , sì;
- $(b, d)$ :  $c_{bd} \geq \max\{c_{ab}, c_{ac}, c_{ce}, c_{de}\}$ , ossia  $31 \geq 23$ , sì;
- $(c, d)$ :  $c_{cd} \geq \max\{c_{ce}, c_{de}\}$ , ossia  $32 \geq 23$ , sì;
- $(d, f)$ :  $c_{df} \geq \max\{c_{de}, c_{ef}\}$ , ossia  $18 \geq 15$ , sì;
- $(e, g)$ :  $c_{eg} \geq \max\{c_{ac}, c_{ag}, c_{ce}\}$ , ossia  $35 \geq 23$ , sì;
- $(f, g)$ :  $c_{fg} \geq \max\{c_{ac}, c_{ag}, c_{ce}, c_{ef}\}$ , ossia  $25 \geq 23$ , sì.

### Esercizio 8.7

Sia  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  il grafo non orientato mostrato in Figura 8.15 e pesato sugli spigoli, con pesi (costi)  $c_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ .

Siccome almeno lo spigolo di costo minimo tra gli spigoli incidenti sul vertice 1 fa parte dell'albero ricoprente minimo, si ha che per  $k \leq 21$  lo spigolo  $(1, 3) \in \mathcal{E}(T^*(k))$ . Analogamente per  $k \geq 10$  lo spigolo  $(5, 7) \in \mathcal{E}(T^*(k))$  visto che in tal caso il suo costo è il minimo fra i costi degli spigoli incidenti sul vertice 5.

Consideriamo pertanto i seguenti 3 casi:

Caso a)  $0 \leq k < 10$ :  $(1, 3) \in \mathcal{E}(T^*(k))$

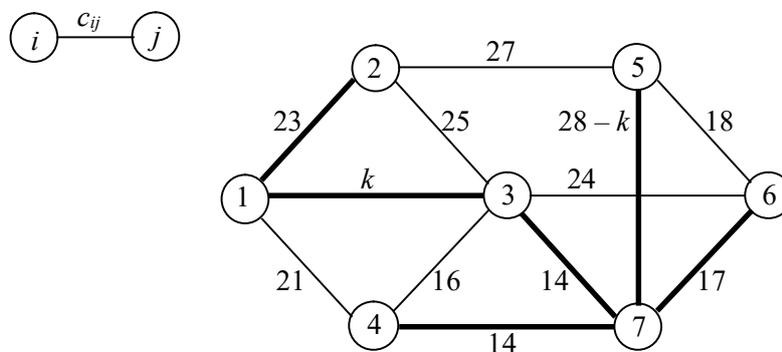
Caso b)  $10 \leq k \leq 21$ :  $(1, 3), (5, 7) \in \mathcal{E}(T^*(k))$

Caso c)  $k > 21$ :  $(5, 7) \in \mathcal{E}(T^*(k))$

Determiniamo il minimo albero ricoprente con l'algoritmo di Kruskal nel caso b) avendo preinserito inizialmente (iter. 0) gli spigoli  $(1, 3), (5, 7)$  all'albero ottimo e quindi essendo già presenti le componenti connesse non banali  $\{1, 3\}, \{5, 7\}$ . La seguente tabella mostra l'esecuzione dell'algoritmo.

iter	$(i, j) \in E$	componenti connesse non banali
0	$(1, 3), (5, 7)$	$\{1, 3\}; \{5, 7\}$
1	$(3, 7)$	$\{1, 3, 5, 7\}$
2	$(4, 7)$	$\{1, 3, 4, 5, 7\}$
3	<del><math>(3, 4)</math></del>	
4	$(6, 7)$	$\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
5	<del><math>(5, 6)</math></del>	
6	<del><math>(1, 4)</math></del>	
7	$(1, 2)$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

L'insieme degli spigoli aggiunti nelle varie iterazioni dell'algoritmo individua l'insieme degli spigoli dell'albero ricoprente di peso minimo mostrato in Figura S8.10, di costo  $c(T^*(k)) = 96$ .



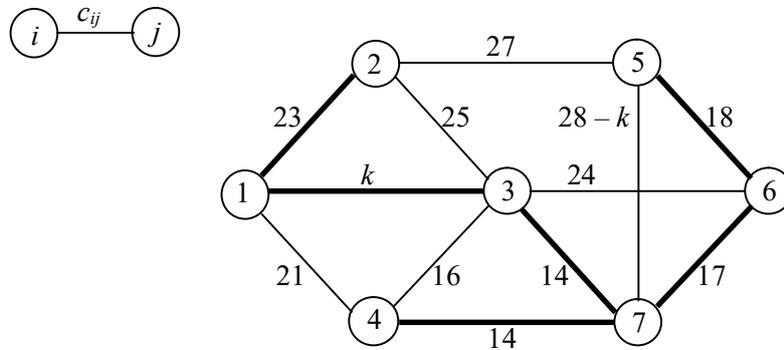
**Figura S8.10.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*(k)$  di  $G$ ,  $10 \leq k \leq 21$ .

Imponiamo le condizioni di ottimalità sui cammini (sui cicli fondamentali), ossia che il costo  $c_{ij} \geq \max_{(p,q) \in P_{ij}(T^*)} \{c_{pq}\}$ , per ogni spigolo  $(i, j) \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(T^*)$ , dove  $P_{ij}(T^*)$  è il cammino da  $i$  a  $j$  in  $T^*$ , per determinare l'eventuale estensione della gamma di valori di  $k$  per cui l'albero ricoprente determinato è ottimo:

- (1, 4):  $c_{14} \geq \max\{c_{13}, c_{37}, c_{47}\}$ , ossia  $k \leq 21$ ;
- (2, 3):  $c_{23} \geq \max\{c_{12}, c_{13}\}$ , ossia  $k \leq 25$ ;
- (2, 5):  $c_{25} \geq \max\{c_{12}, c_{13}, c_{37}, c_{57}\}$ , ossia  $27 \geq \max\{k, 28 - k\}$ , cioè  $1 \leq k \leq 27$ ;
- (3, 4):  $c_{34} \geq \max\{c_{37}, c_{47}\}$ , ossia  $16 \geq 14$ , sempre verificato;
- (3, 6):  $c_{36} \geq \max\{c_{37}, c_{67}\}$ , ossia  $24 \geq 17$ , sempre verificato;
- (5, 6):  $c_{56} \geq \max\{c_{57}, c_{67}\}$ , ossia  $18 \geq \max\{17, 28 - k\}$ , cioè  $10 \leq k$ .

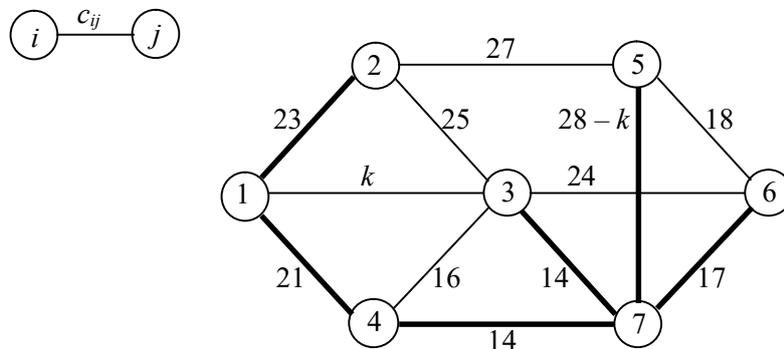
Risulta confermato che l'albero ricoprente di Figura S8.10 è ottimo per  $10 \leq k \leq 21$ .

Consideriamo il caso a)  $0 \leq k < 10$ . In tal caso lo spigolo (5, 7) non fa parte dell'albero ricoprente ottimo. Ripartendo dall'albero ricoprente individuato per il caso b) e applicando le condizioni di ottimalità sui cammini rispetto allo spigolo (5, 6) risulta conveniente inserire lo spigolo (5, 6) al posto di (5, 7). Si ottiene l'albero ricoprente ottimo mostrato in Figura S8.11, di costo  $c(T^*(k)) = 86 + k$ . Si può verificare (applicando le condizioni di ottimalità) che l'albero di Figura S8.11 è ottimo.



**Figura S8.11.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*(k)$  di  $G$ ,  $0 \leq k < 10$ .

Consideriamo il caso c)  $21 < k$ . In tal caso lo spigolo (1, 3) non fa parte dell'albero ricoprente ottimo. Ripartendo dall'albero ricoprente individuato per il caso b) e applicando le condizioni di ottimalità sui cammini rispetto allo spigolo (1, 4) risulta conveniente inserire lo spigolo (1, 4) al posto di (1, 3). Si ottiene l'albero ricoprente ottimo mostrato in Figura S8.12, di costo  $c(T^*(k)) = 117 - k$ . Si può verificare (applicando le condizioni di ottimalità) che l'albero di Figura S8.12 è ottimo.



**Figura S8.12.** L'albero ricoprente di costo minimo  $T^*(k)$  di  $G$ ,  $k > 21$ .

### Esercizio 8.8

Sia dato il grafo  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  mostrato in Figura 8.16, pesato sugli spigoli, con pesi (costi)  $c_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , e sia  $T^*$  l'albero ricoprente di costo minimo rappresentato nella figura.

Imponiamo le condizioni di ottimalità sui cammini (sui cicli fondamentali), ossia che il costo  $c_{ij} \geq \max_{(p,q) \in P_{ij}(T^*)} \{c_{pq}\}$ , per ogni spigolo  $(i, j) \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(T^*)$ , dove  $P_{ij}(T^*)$  è il cammino da  $i$  a  $j$  in  $T^*$ , per determinare la gamma di valori di  $k$  per cui l'albero ricoprente determinato è ottimo:

$$(1, 4): c_{14} \geq \max\{c_{12}, c_{23}, c_{34}\}, \text{ ossia } k \geq 3;$$

$$(6, 7): c_{67} \geq \max\{c_{45}, c_{47}, c_{56}\}, \text{ ossia } 5 \geq 4, \text{ sempre verificato};$$

$$(7, 8): c_{78} \geq \max\{c_{47}, c_{4t}, c_{8t}\}, \text{ ossia } 7 \geq 2k - 3, \text{ cioè } k \leq 5;$$

Pertanto, l'albero ricoprente mostrato in figura 8.16 è quello di costo minimo per  $3 \leq k \leq 5$ .

### Esercizio 8.9

L'affermazione riportata è corretta. Infatti, indicando con  $(p, q)$  lo spigolo di costo minimo del grafo, se esistesse un albero di costo minimo  $T^*$  non contenente  $(p, q)$ , sarebbe comunque possibile sostituire uno degli spigoli del cammino da  $p$  a  $q$  di  $T^*$  con lo spigolo  $(p, q)$  ottenendo un altro albero ricoprente di costo non superiore al costo di  $T^*$ , essendo  $(p, q)$  lo spigolo di costo minimo.

### Esercizio 8.10

Dato un grafo  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  pesato sugli spigoli e considerato il grafo  $G' = G - (p, q)$  ottenuto eliminando da  $G$  lo spigolo  $(p, q) \in \mathcal{E}$  di costo massimo, se  $G'$  è connesso allora esiste almeno un albero ricoprente  $T^*$  di costo minimo per  $G'$  che è anche un albero ricoprente di costo minimo per  $G$ . Infatti, se ciò non fosse vero dovrebbe esistere un altro albero  $T^o$  che differisce da  $T^*$  almeno per la presenza dello spigolo  $(p, q)$  al posto di uno degli spigoli di  $T^*$  e di costo inferiore a quest'ultimo, ma ciò è impossibile se  $(p, q)$  è lo spigolo di costo massimo di  $G$ .