Soluzioni
Esercizi 1

Es. 1

- Grafo bipartito $B = (T \cup D, E)$, con $E = \bigcup_{j \in D} \Gamma(j)$
  con $\Gamma(j) = \{(i,j) \in E : i \in T(j)\}$
- Problema di abbinamento (matching) su B
  In particolare abbinamento di max cardinalità
  Se intendiamo eseguire tutti i compiti è richiesta la determinazione dell'abbinamento T-completo (se esiste)

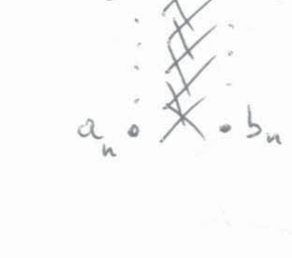
Es. 2

Problema di colorazione ottima (minima) dei vertici di $G = (V, E)$ con $V = R$ e $E = \bigcup_{i \in V} E(i)$
con $E(i) = \{(i,j) \in V \times V : j \in R(i)\}$

Es. 3

$(a, b, c, e, b, c) \Rightarrow$ percorso (walk)
$(a, b, c, e, b, f) \Rightarrow$ sentiero (trail)
$(a, b, c, e, b, f, a) \Rightarrow$ circuito semplice
$(a, b, c, d, e, f) \Rightarrow$ cammino
$(a, b, c, d, e, f, a) \Rightarrow$ ciclo

Es. 4



$K_{n,n}$

Un cammino ricoprente che parte da a ha la seguente struttura generica

$$(a \equiv a_1, b_{j_1}, a_{i_2}, \ldots, b_{j_h}, a_{i_{h+1}}, \ldots, b_{j_{n-1}}, a_{i_n}, b_{j_n})$$

I cammini ricoprenti che partono da a sono quindi $n!(n-1)!$ ossia tanti quanto le permutazioni degli n vertici di B moltiplicato il num. permutazioni degli $n-1$ vertici di $A \setminus \{a\}$

Es. 5

$K_{n,n}$

1-fattori di $K_{n,n}$ sono $n!$
cioè tanti quanti i possibili abbinamenti perfetti distinti degli n vertici di U con gli n vertici di V $\equiv$ permutazioni di V

Es. 6

$K_{2n,2n}$

2-fattori connessi di $K_{2n,2n}$ =
= # cicli ricoprenti $= \frac{(2n!)(2n-1)!}{2}$
(per le analoghe considerazioni fatte nell'Esercizio 4)
La divisione per 2 è dovuta al fatto che un ciclo può essere percorso sia in avanti che indietro

Es. 7

$$f(n) = n^2 + \frac{n}{\log n}\log n! \le n^2 + \frac{n}{\log n}\log n^n =$$
$$= n^2 + \frac{n}{\log n}\, n\log n = 2n^2 = O(n^2) \quad \left(= \Theta(n^2)\right)$$

Es. 8

$$f(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \le n^3 + n^3 + \dots + n^3 = n^4 = O(n^4)$$

Es. 9

$$f(n) = (\log n)^2 + \log n^2 = (\log n)^2 + 2\log n = O(\log^2 n)$$

Es. 10

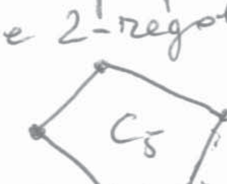
C_5 è isomorfo a $\overline{C_5}$:
- condizioni necessarie soddisfatte
  - stesso ordine
  - stessa dimensione
  - ciascun vertice v di C_5 e la sua immagine v' di $\overline{C_5}$ hanno stesso grado

sono entrambi due cicli da 5 sui 5 vertici

Es. 11

Classi di isomorfismo di grafi con $n=5$ vertici e $m=5$ spigoli e 2-regolari

una sola classe



Es. 12

K_4

Noto che cond. nec. affinché un grafo sia connesso è che $m \geq n-1$, rimuovendo 4 spigoli da K_4 ho un grafo con $n=4$ vertici e $m=2$ spigoli quindi non connesso

Posso viceversa ottenere $\binom{6}{2}$ grafi non connessi

Es 13

Un albero di $n=4$ vertici ha $m=3$ spigoli
Sono $\binom{6}{3}$ i grafi di 4 vertici e 3 spigoli
(in quanto 6 sono le possibili adiacenze, ovvero spigoli, tra 4 vertici)
Dei $\binom{6}{3}$ grafi non tutti sono alberi, in particolare i 4 distinti triangoli

non lo sono.

2 classi di isomorfismo: - il cammino di 3 spigoli
- il grafo "CLAW" 

Es. 14

$$\cdot\ f(n) = n^2 + n\log n^n + (n+5)(n+2) + 2^{10} n^2 =$$
$$= n^2 + n^2 \log n + (n+5)(n+2) + 2^{10} n^2 = \Theta(n^2 \lg n)$$

$$\cdot\ g(n) = n^3 \log((2n)!) + 10n^5 + 5\binom{n}{3} \leq$$
$$\leq n^3 \log(2n)^{2n} + 10n^5 + \frac{5}{6} n(n-1)(n-2) =$$
$$= 2n^4 \log(2n) + 10n^5 + \frac{5}{6} n(n-1)(n-2) = \Theta(n^5)$$

$$\cdot\ h(n) = 2n^2 + 5\binom{2n}{n} + n^{10} \leq 2n^2 + n^{10} + \sum_{h=0}^{2n} \binom{2n}{h} =$$
$$= 2n^2 + n^{10} + 2^{2n} = O(2^{2n})$$

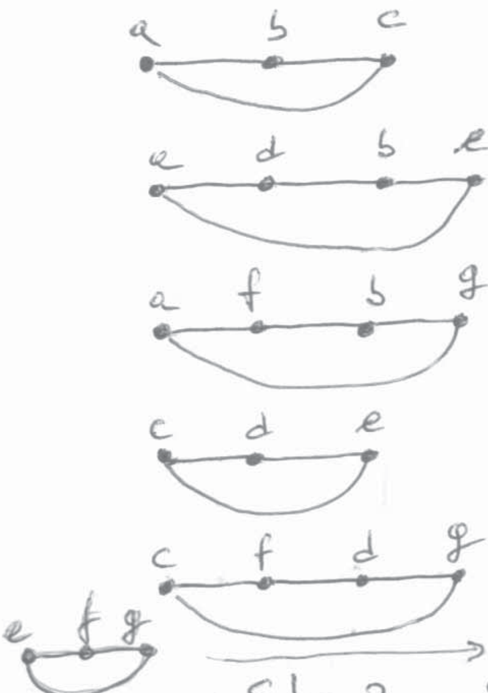
Es. 15

grafi bipartiti con $n_1 = 2 = |X|$ e $n_2 = 8 = |Y|$ e $d(x_1) = d(x_2) = 4$ sono pari agli $\binom{8}{4}$ diversi modi di scegliere i 4 adiacenti di x_1 moltiplicato gli $\binom{8}{4}$ diversi modi di scegliere i 4 adiacenti di x_2.

Es. 16

Alg. di Hierholzer

- Step 1 Partizionare l'insieme degli spigoli in q cicli, ottenuti ciascuno con visita in profondità testando ogni volta se è possibile con uno spigolo tornare al nodo iniziale formando un ciclo



$C_1 = (a, b, c, a)$

$C_2 = (a, d, b, e, a)$

$C_3 = (a, f, b, g, a)$

$C_4 = (c, d, e, c)$

$C_5 = (c, f, d, g, c)$

$C_6 = (e, f, g, e)$

- Step 2 Composizione del circuito euleriano a partire da $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, iniziando a percorrere C_1 e proseguendo su un altro ciclo C_i non appena si visita un vertice $x \in C_1 \cap C_i$ per poi alla fine ritornare su C_1 per terminare la sua visita

$C_1^{I} = (a, b, c, a)$

$C_2^{II} = (a, d, b, e, a)$

$C_3^{III} = (a, f, b, g, a)$

$C_5^{IV} = (c, f, d, g, c)$

$C_6^{V} = (e, f, g, e)$

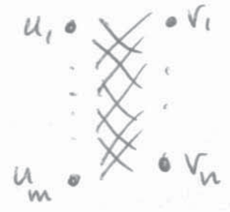
$C_4^{VI} = (c, d, e, c)$

Il numero romano ad apice indica l'ordine di visita dei cicli per costruire il circuito euleriano: le frecce indicano l'uscita e l'entrata nel ciclo

Il risultato è il seguente circuito euleriano

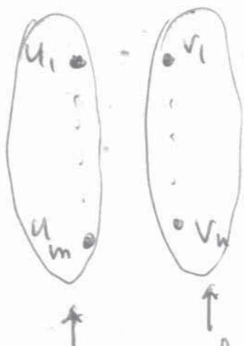
$C_E = (a, f, g, e, c, d, e, f, d, g, c, f, b, g, a, d, b, e, a, b, c, a)$

Es. 17



$K_{m,n}$

Per essere euleriano $d(u_i)=n$ e $d(v_j)=m$ entrambi pari e positivi (>0) altrimenti $K_{m,n}$ non è bipartito e in particolare non sarebbe connesso.



clique clique

$\overline{K_{m,n}}$, quindi è connesso se e solo se $m=0$ oppure $n=0$. Inoltre $d(u_i)=m-1$ e $d(v_i)=n-1$ quindi deve essere $m=0$ e $n \geq 1$ e dispari, oppure $n=0$ e $m \geq 1$ e dispari

Es. 18

- Visitare in ampiezza G dal nodo a per determinare le distanze $d(a,i)$ di ogni vertice i da a (con $d(a,a)=0$)
- Sia A l'insieme dei vertici a distanza pari da a e B quelli a distanza dispari
- Se per ogni $a_i, a_j \in A$ si ha $(a_i, a_j) \notin E(G)$ e se per ogni $b_h, b_k \in B$ si ha $(b_h, b_k) \notin E(G)$ allora $G=(A \cup B, E)$ è bipartito

Nel nostro caso $A=\{a,e,f\}$ e $B=\{b,c,d,g,h,i\}$ e $\nexists\ (i,j) \in A$ con $i,j \in A$ e lo stesso vale fra vertici di B quindi il grafo dato è bipartito

Es. 19

- $m \leq n-1$ se G è non orientato (per la cond. nec. aciclicità)
- $\binom{n}{2}$ se $D=(N,A)$ è un digrafo (orientato) aciclico: con $A=\{(i,j) \in N \times N : 1 \leq i < j \leq n\}$

Es. 20

$\binom{28}{14}$, infatti $\binom{n}{2} = 28$ possibili spigoli (con $n=8$) e ovviamente se G e $\bar{G}$ hanno stesso numero di spigoli hanno esattamente la metà dei possibili 28 spigoli. Quindi G si ottiene selezionando 14 dei 28 spigoli e le possibili selezioni distinte (a cui corrispondono distinti grafi) sono $\binom{28}{14}$

Es. 21

Supponiamo, per assurdo, che non sia vero e che quindi essendo $0 \le d(i) \le n-1$ ci sia esattamente un vertice di grado 0, un vertice di grado 1, ..., e un vertice di grado $n-1$. Ma la presenza contemporanea di un vertice di grado 0, ovvero isolato, e di un vertice ~~adiacente~~ di grado $n-1$, cioè adiacente a tutti gli altri è impossibile. Quindi i possibili valori dei gradi sono in $\{0, 1, .., n-2\}$ oppure in $\{1, 2, .., n-1\}$ ed essendo i vertici n per il principio di Pigeonhole esistono almeno 2 vertici di stesso grado.

Es. 22

Se G è euleriano $G-(i,j)$ è senz'altro connesso perché rimuovendo uno spigolo da un circuito non si disconnettono i suoi vertici. $G-(i,j)$ ammette sentiero euleriano, in particolare quello che parte da j percorre il circuito euleriano di G e termina in i.

Es. 23 Indichiamo con $d_G(v)$ e $d_{\bar{G}}(v)$ i gradi di v in G e $\bar{G}$

- Noto che $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n-1$, se n è pari $n-1$ è dispari e in tal caso almeno uno dei due valori $d_G(v)$, $d_{\bar{G}}(v)$ è dispari per cui senz'altro uno tra G e $\bar{G}$ non è euleriano.
- Se n è dispari segue che $n-1$ è pari quindi $d_G(v)$ e $d_{\bar{G}}(v)$ possono essere entrambi pari e se questo vale per ogni $v \in V(G)$ e sia G che $\bar{G}$ sono connessi allora entrambi sono euleriani. Un esempio è costituito da C_5 e $\bar{C}_5$

Pertanto il primo quesito è vero e il secondo no

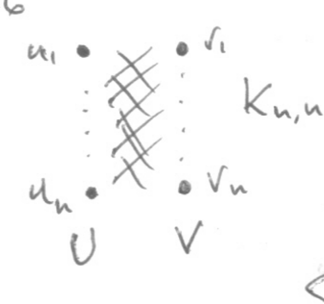
Es. 24

Sia $G=(V,E)$ con V insieme delle 10 partite ed E le coppie di partite simultanee.
Per ipotesi $\Delta(G)=4$, quindi $\chi(G) \leq \Delta(G)+1 = 5$ canali

Es. 25

I triangoli (C_3) di K_n sono terne di vertici
Quindi essendo le possibili terne di $n=10$ vertici in numero pari a $\binom{10}{3} = 120$ questo è il numero di possibili triangoli di K_{10}
In generale i cicli di q vertici sono $\binom{10}{q} \cdot \frac{(q-1)!}{2}$ dove il secondo fattore è il # di cicli con gli stessi vertici. Pertanto i C_4 sono $\binom{10}{4}\frac{3!}{2} = 630$

Es. 26



In un $K_{n,n}$ i cicli da 4 vertici (C_4) si costruiscono selezionando 2 vertici di U e 2 vertici di V. Quindi le possibili selezioni sono $\binom{n}{2} \cdot \binom{n}{2}$

$$\text{Se } n=10 \Rightarrow \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2} = 45 \cdot 45 = 2025$$

In generale i cicli di $2q$ vertici si ottengono selezionando q vertici di U e q vertici di V e ordinando i $q-1$ vertici di U (uno è fissato come primo vertice) e ordinando i q vertici di V. Quindi $\binom{10}{q}\binom{10}{q}\frac{(q-1)!\,q!}{2}$ in quanto le sequenze a coppie definiscono uno stesso ciclo.

Es. 27

Detto D_n il digraf fortemente completo di n nodi, il numero di cammini da i e j è pari al # cammini di lunghezza 1 (formati da 1 arco), più il # cammini di lunghezza 2 (formati da 2 archi), più .... il # cammini di lunghezza $n-1$

cammini di lungh. 1 : (i, j) $\Longrightarrow \# = D(n-2, 0) = 1$

" " " 2 : (i, x_1, j) $\Longrightarrow \# = D(n-2, 1) = n-2$

cammini di lungh. $k+1$: $(i, x_1, \dots, x_k, j) \Longrightarrow \# = D(n-2, k) = \binom{n-2}{k} k!$
(da i a j)

cammini di lungh. $n-1$: $(i, x_1, \dots, x_{n-2}, j) \Longrightarrow \# = D(n-2, n-2) = (n-2)!$
(da i e j)

Facendo quindi la somma del loro numero: $\sum_{k=0}^{n-2} D(n-2, k) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} k!$$

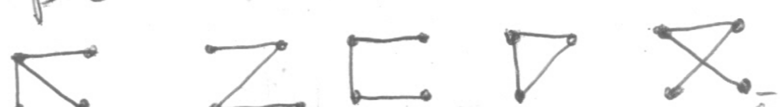
Es. 28

G e $\bar{G}$ entrambi alberi $\Longrightarrow \frac{1}{2}\binom{n}{2} = n-1$ spigoli

cioè $\frac{1}{4} n(n-1) = n-1 \Longrightarrow \begin{cases} n_1 = 1 \\ n_2 = 4 \end{cases}$

- $n_1 = 1$ quindi $G = \bar{G} = (\{v\}, \emptyset)$ è un albero banale di un solo vertice (isolato) quindi OK è un albero
- $n_2 = 4$

se G è un albero ha $4-1 = 3$ spigoli dei $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ possibili. Quindi abbiamo $\binom{6}{3} = 20$ possibilità di selezionare 3 di 6 spigoli. Di queste possibili scelte di spigoli non tutte rappresentano un albero (non lo sono i C_3), né sono albero i $\bar{G}$ degli alberi del tipo  perché $E(\bar{G})$ sarebbero un C_3. Quindi



$\Longrightarrow$ gli unici così sono G e $\bar{G}$ cammini di 4 nodi

G albero ma $\bar{G}$ no! (#4) | G e $\bar{G}$ alberi (#4) | G e $\bar{G}$ alberi (#4) | G non è albero (#4) | G e $\bar{G}$ alberi (#4)

In totale sono 12 grafi di $n=4$ vertici + 1 grafo di un solo vertice.