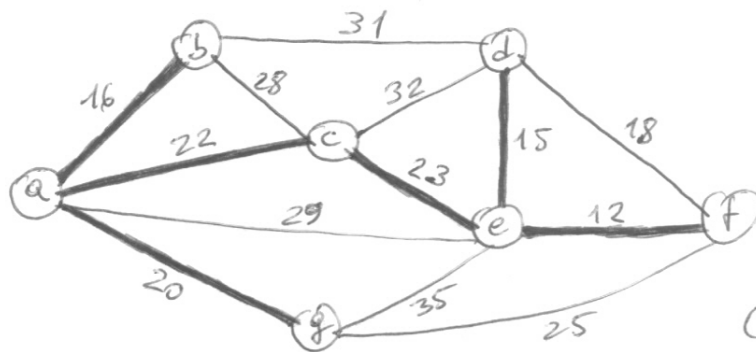


Es. 2



$G=(V,E)$
 $c_{ij}, \forall (i,j) \in E$

$T^*=(V,E^*), E^* \subseteq E$

$(i,j) \in E^* \iff \text{---} \text{---} \text{---}$

Si come la lista degli spigoli è preordinata in senso non decrescente dei costi, conviene utilizzare l'algoritmo di Kruskal.

Iter.	$(i,j) \in E$	componenti connesse non banali
1	(e,f)	{e,f}
2	(d,e)	{d,e,f}
3	(a,b)	{a,b}; {d,e,f}
4	(d,f)	
5	(a,g)	{a,b,g}; {d,e,f}
6	(a,c)	{a,b,c,g}; {d,e,f}
7	(c,e)	{a,b,c,d,e,f,g}

STOP sono stati aggiunti $n-1 = 6$ spigoli

$\sum(T^*) = 108$

T^* è la soluzione ottima (albero di costo minimo). Infatti applicando, ad esempio, le condizioni di ottimalità sui tagli (fondamentali) si ha:

$(a,b) \implies c_{ab} \leq c_{bc}; c_{bd} \quad 16 \leq 28; 31 \quad \checkmark$

$(a,c) \implies c_{ac} \leq c_{ae}; c_{bc}; c_{bd}; c_{ce}; c_{cf} \quad 22 \leq 29; 28; 31; 35; 25 \quad \checkmark$

$(a,g) \implies c_{ag} \leq c_{eg}; c_{gf} \quad 20 \leq 35; 25 \quad \checkmark$

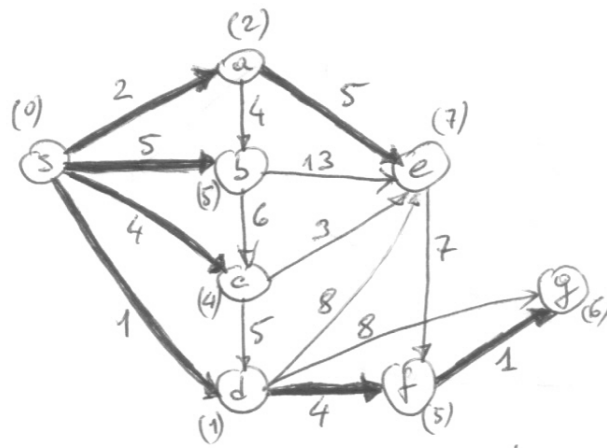
$(c,e) \implies c_{ce} \leq c_{ae}; c_{bd}; c_{cd}; c_{ge}; c_{gf} \quad 23 \leq 29; 31; 32; 35; 25 \quad \checkmark$

$(d,e) \implies c_{de} \leq c_{bd}; c_{cd}; c_{df} \quad 15 \leq 31; 32; 18 \quad \checkmark$

$(e,f) \implies c_{ef} \leq c_{df}; c_{fg} \quad 12 \leq 18; 25 \quad \checkmark$

ES. 3

(3)



$$R = (N, A, c)$$

$$T^* = (N, A^*)$$

$$(i, j) \in A^* \iff (i, j) \in A \text{ and } d_i < d_j$$

Verifichiamo preliminarmente se la rete è aciclica, applicando l'algoritmo di ordinamento topologico

$i \in N$	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
s	0;-							
a	1;-	0;2						
b	2;-	1;-	0;3					
c	2;-	1;-		0;4				
d	2;-	1;-			0;5			
e	4;-		3;-	2;-	1;-	0;6		
f	2;-					1;-	0;7	
g	2;-					1;-		0;8

$i \in N$	s	a	b	c	d	e	f	g
$f(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8

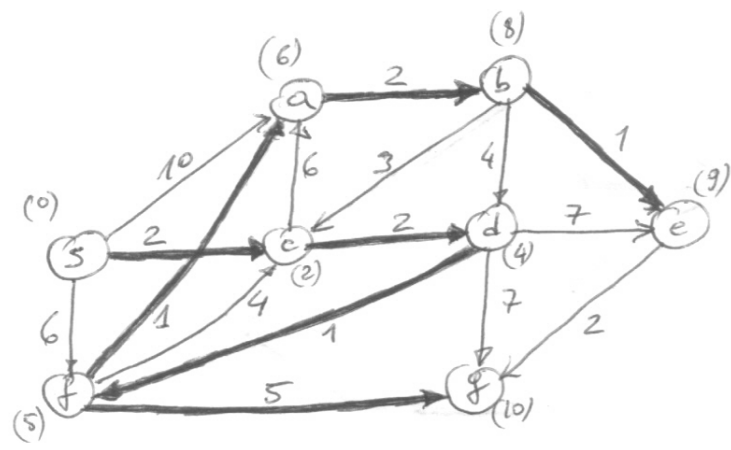
La rete è aciclica! Applichiamo quindi l'algoritmo dei cammini minimi per reti acicliche

$f(i)$	$i \in N$	d_i^*	$pred(i)$
1	s	$d_s = 0$	s
2	a	$d_a = d_s + c_{sa} = 2$	s
3	b	$d_b = \min \{ (d_s + c_{sb}); (d_a + c_{ab}) \} = 5$	s
4	c	$d_c = \min \{ (d_s + c_{sc}); (d_b + c_{bc}) \} = 4$	s
5	d	$d_d = \min \{ (d_s + c_{sd}); (d_c + c_{cd}) \} = 1$	s
6	e	$d_e = \min \{ (d_a + c_{ae}); (d_b + c_{be}); (d_c + c_{ce}); (d_d + c_{de}) \} = 7$	a
7	f	$d_f = \min \{ (d_d + c_{df}); (d_e + c_{ef}) \} = 5$	d
8	g	$d_g = \min \{ (d_d + c_{dg}); (d_f + c_{fg}) \} = 6$	f

T^* è l'albero dei cammini minimi da s

ES. 4

4



$R = (N, A, c)$
 $T^* = (N, A^*)$
 $(i, j) \in A^* \quad \begin{matrix} i \\ (d_i^*) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} j \\ (d_j^*) \end{matrix}$

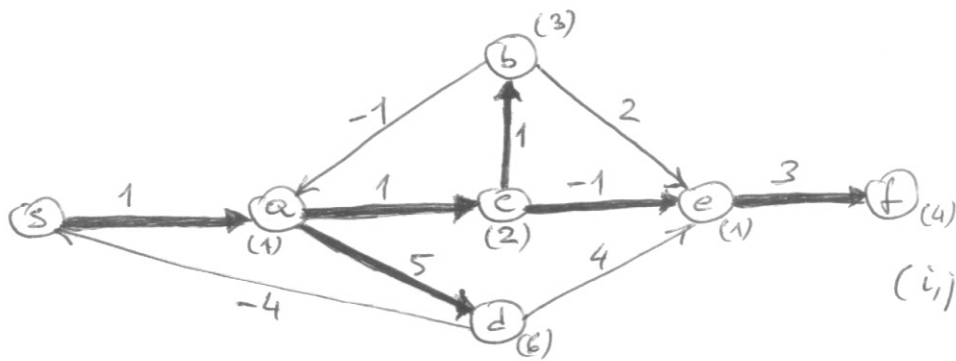
Verifichiamo preliminarmente se la rete R è aciclica, applicando l'algoritmo di ordinamento topologico

$i \in N$	1°	2°
s	0; 1	
a	3; -	2; -
b	1; -	
c	3; -	2; -
d	2; -	
e	2; -	
f	2; -	1; -
g	3; -	

l'algoritmo non può proseguire: alle 2° iterazione non ci sono nodi di grado interno nullo! La rete non è aciclica.

Quando non potendo applicare l'algoritmo dei cammini minimi per reti acicliche e visto che c'è l'algoritmo più efficiente è quello di Dijkstra.

$i \in N$	It. 1	It. 2	It. 3	It. 4	It. 5	It. 6	It. 7	It. 8
s	*							
a	10; s	8; c		6; f	*			
b					8; a	*		
c	2; s	*						
d		4; c	*					
e			11; d			9; b	*	
f	6; s		5; d	*				
g			11; d	10; f				*



$R = (N, A, c)$

$T^* = (N, A^*)$

$(i, j) \in A^* \iff i \rightarrow j$
 $(d_i^*) \quad (d_j^*)$

Verifichiamo preliminarmente se la rete R è aciclica, applicando l'algoritmo di ordin. topolog.

$[d^-(i), f(i)]$

$i \in N$	1°
s	1; -
a	2; -
b	1; -
c	1; -
d	1; -
e	3; -
f	1; -

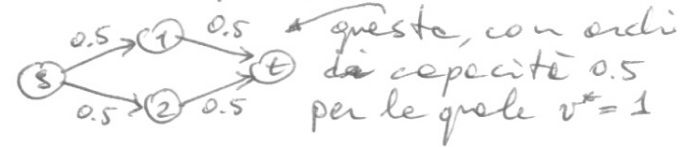
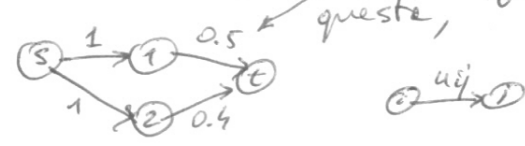
l'algoritmo non può proseguire:
 alla 1° iterazione non ci sono
 nodi di grado interno nullo!
 La rete non è aciclica.

Quando non potendo applicare l'algoritmo dei cammini minimi su reti acicliche e visto che alcuni costi sono negativi (ad es. $c_{ba} = -1$) non possiamo applicare neanche l'alg. di Dijkstra. Appliciamo allora l'algoritmo di Bellman-Ford

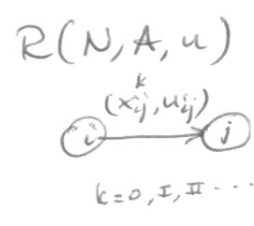
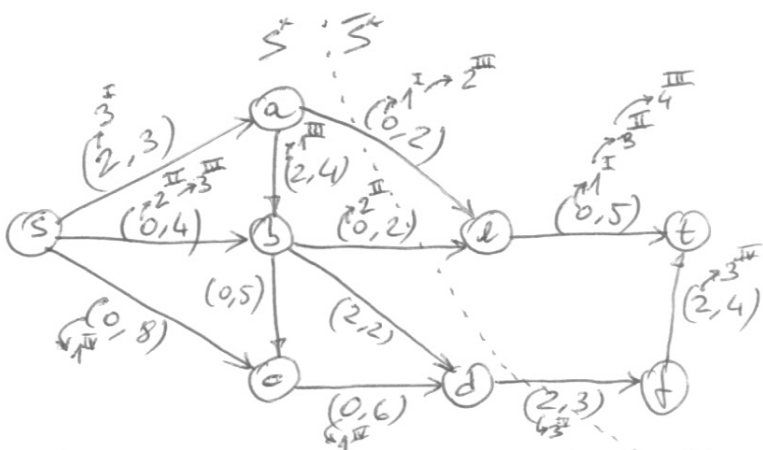
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
$Q=L$	{s}	{a}	{c,d}	{d,b,e}	{b,e}	{e}	{f}
s	*						
a	1; s	*					
b			3; c		*		
c		2; a	*				
d		6; a		*			
e			1; c			*	
f						4; e	*

Per giustificare l'ottimalità delle soluzioni trovate (T^*) applichiamo le cond. di Bellman ($d_j \leq d_i + c_{ij}, \forall (i,j) \in A$) sugli archi $A \setminus A^*$:
 $(b,a) \Rightarrow d_a \leq d_b + c_{ba} \checkmark$; $(d,s) \Rightarrow d_s \leq d_d + c_{ds} \checkmark$; $(b,e) \Rightarrow d_e \leq d_b + c_{be} \checkmark$

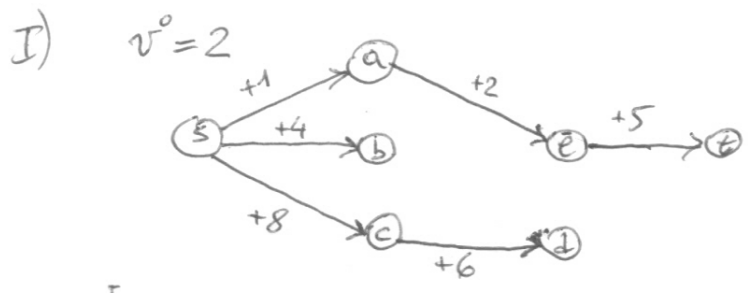
ES. 6

- $R=(N, A, u)$
- a) Vero! Infatti:
 u_{ij} intero $\forall (i,j) \in A \Rightarrow v^* = u[S^*, \bar{S}^*] = \sum_{(i,j) \in (S^*, \bar{S}^*)} u_{ij}$ intero!
- b) Falso! Infatti:
 u_{ij} non intero $\forall (i,j) \in A \Rightarrow$ non è detto che v^* non intero, ed esempio se la rete è
- 
- c) Falso! Infatti:
 u_{ij} intero $\forall (i,j) \in \Gamma^+(s) \Rightarrow$ non è detto che v^* sia intero, ed esempio se la rete è
- 
- d) Vero! Infatti:
 u_{ij} intero $\forall (i,j) \in A \Rightarrow x_{ij}^*$ intero perché ad ogni iterazione dell'algoritmo dei cammini aumentanti il flusso aumentato di s intero

Es. 7



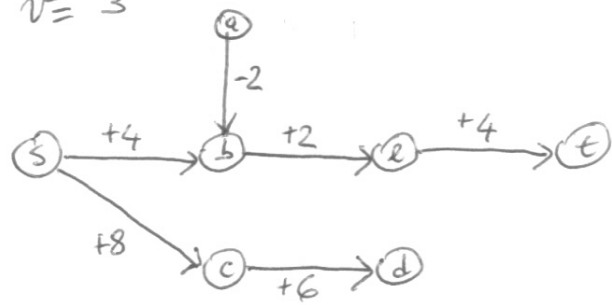
Applichiamo alg. di Ford-Fulkerson, ricercando le catene aumentanti più corte.



Albero di ricerca in ampiezza dei nodi raggiungibili da s (la ricerca è arrestata se t è raggiungibile)

$P_{st}^I (s=1) = [(s,a)+1; (a,e)+1; (e,t)+1]$. Si aumenta il flusso di $s=1$ lungo P_{st}^I

II) $v^I = 3$

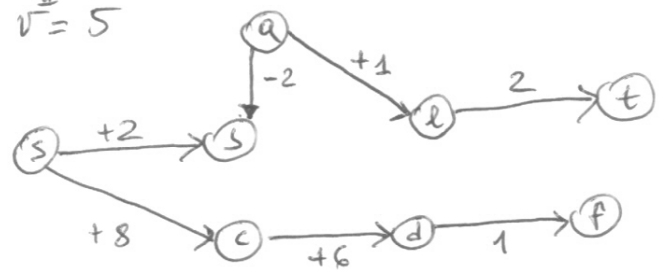


Albero di ricerca in ampiezza dei nodi raggiungibili da s

$$P_{st}^{II}(\delta=2) = [(s,b)+2; (b,e)+2; (e,t)+2].$$

Si aumenta il flusso lungo P_{st}^{II} di $\delta=2$

III) $v^{II} = 5$

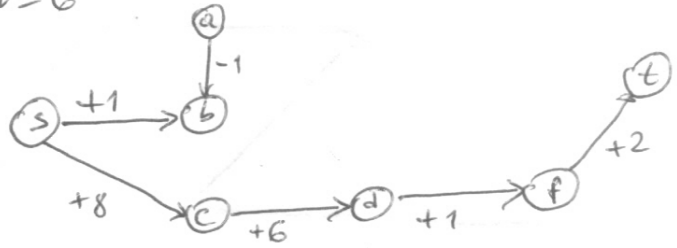


Albero di ricerca in ampiezza dei nodi raggiungibili da s

$$P_{st}^{III}(\delta=1) = [(s,b)+1; (a,b)-1; (a,e)+1; (e,t)+1]$$

Si aumenta il flusso lungo P_{st}^{III} di $\delta=1$

IV) $v^{III} = 6$

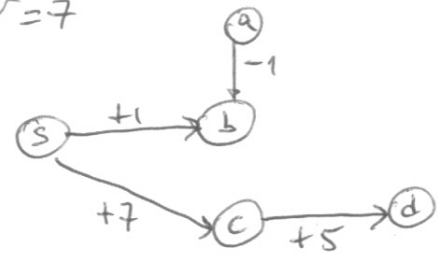


Albero di ricerca in ampiezza dei nodi raggiungibili da s

$$P_{st}^{IV}(\delta=1) = [(s,c)+1; (c,d)+1; (d,f)+1; (f,t)+1]$$

Si aumenta il flusso lungo P_{st}^{IV} di $\delta=1$

V) $v^{IV} = 7$



Albero di ricerca in ampiezza dei nodi raggiungibili da s
Non si raggiunge t
A cammino aumentante STOP!

$v^* = 7$ è quindi massimo!

Per certificare l'ottimalità della soluzione è sufficiente esibire che esiste un taglio $s-t (S, \bar{S})$ tale che $v = u[S, \bar{S}]$. Tale taglio che è ovviamente di capacità minima (S^*, \bar{S}^*) è quello ottenuto ponendo $S^* = \{s, a, b, c, d\}$ cioè i nodi raggiungibili da s all'ultima iterazione dell'alg. sui cammini aumentanti.

Dato $\bar{S}^* = N \setminus S^* = \{e, f, t\}$, infatti

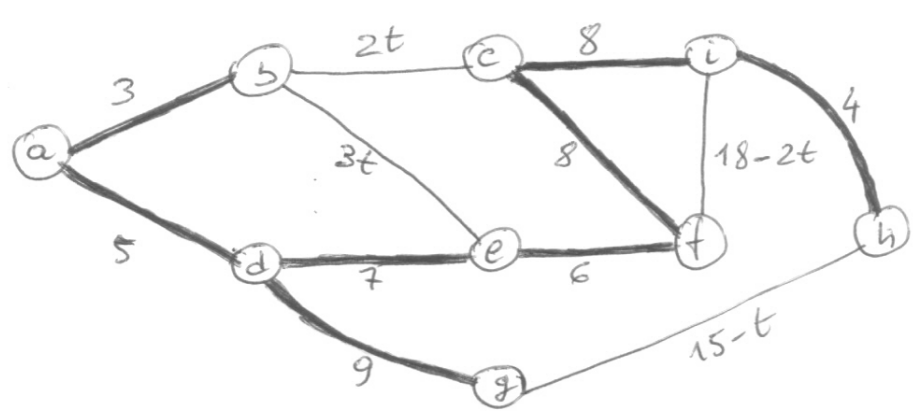
$$u[S^*, \bar{S}^*] = u_{ae} + u_{be} + u_{df} = 7$$

per cui $v^* = u[S^*, \bar{S}^*] = 7$!

Se $u'_{se} = u_{se} + 2$ il flusso massimo non aumenta perché (s, a) non appartiene a (S^*, \bar{S}^*) e quindi $u[S^*, \bar{S}^*]$ non varia (non aumenta)

N.B.: In Appendice Es. 7 l'esercizio risolto con l'algoritmo cammini aumentanti.

Es. 8



$G = (V, E)$
 $T = (V, E(T))$
 $(i, j) \in E(T) \iff i \text{ --- } j$
 $n = 9 \quad m = 12$

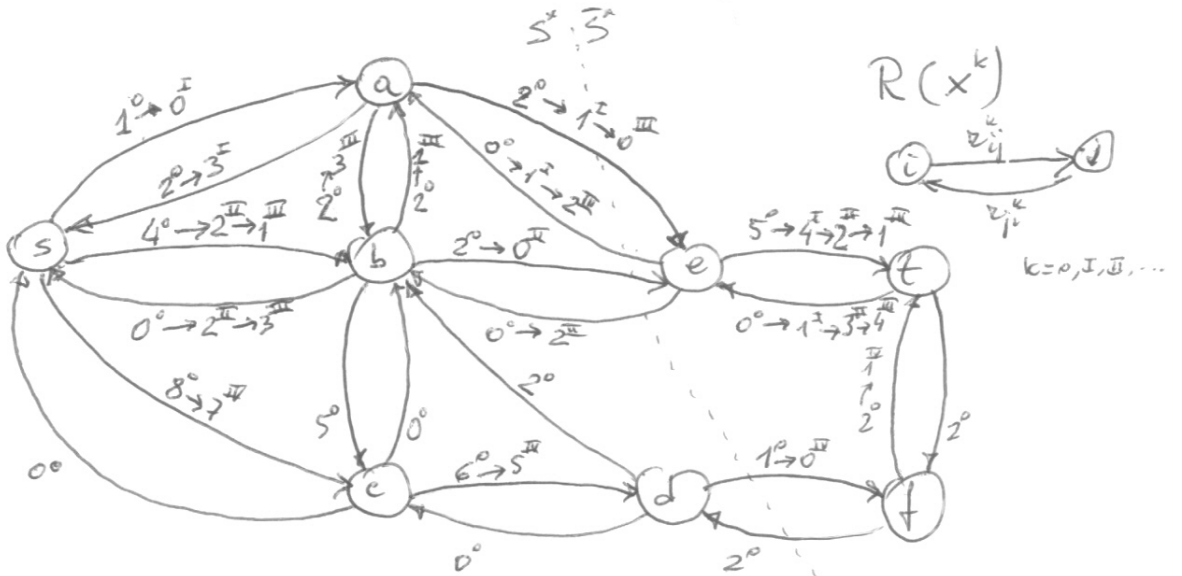
Già come il graf non è denso conviene utilizzare il criterio di ottimalità sui cammini (o cicli) fond.

$(b, c) \Rightarrow c_{bc} \geq \max(c_{ab}, c_{ad}, c_{ef}, c_{ef}); \quad 2t \geq 8; \quad t \geq 4$
 $(b, e) \Rightarrow c_{be} \geq \max(c_{ab}, c_{ad}, c_{de}); \quad 3t \geq 7; \quad t \geq 7/3$
 $(f, i) \Rightarrow c_{fi} \geq \max(c_{cf}, c_{ci}); \quad 18 - 2t \geq 8; \quad t \leq 5$
 $(g, h) \Rightarrow c_{gh} \geq \max(c_{gf}, c_{ci}, c_{de}, c_{df}, c_{ef}, c_{hi}); \quad 15 - t \geq 9; \quad t \leq 6$

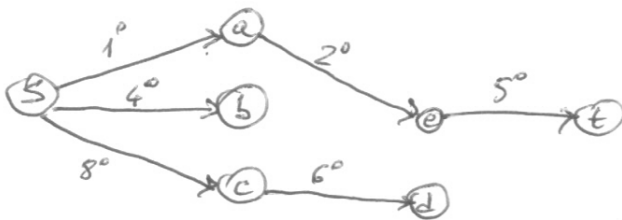
$4 \leq t \leq 5$

Appendice Es. 7

Algoritmo dei cammini aumentanti sulle rete residue $R(x)$



I)

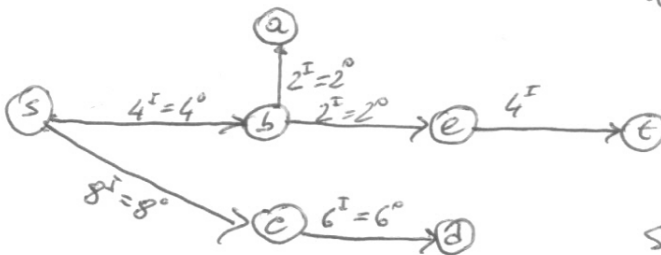


cammino aumentante

$$P_{st}^I(s=1) = (s, a, e, t)$$

Si aumenta il flusso di $s=1$ su $P_{st}^I \Rightarrow$ si modifica le rete residue $\Rightarrow R(x^I)$

II)

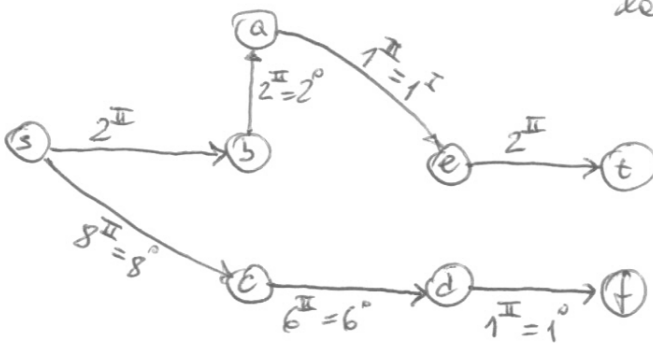


cammino aumentante

$$P_{st}^{II}(s=2) = (s, b, e, t)$$

Si aumenta il flusso di $s=2$ su $P_{st}^{II} \Rightarrow$ si modifica le rete residue $\Rightarrow R(x^{II})$

III)

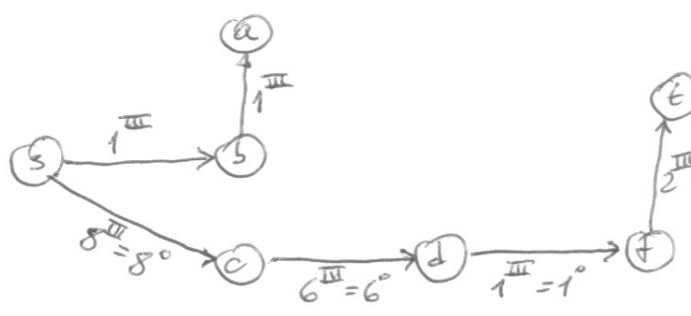


cammino aumentante

$$P_{st}^{III}(s=1) = (s, b, a, e, t)$$

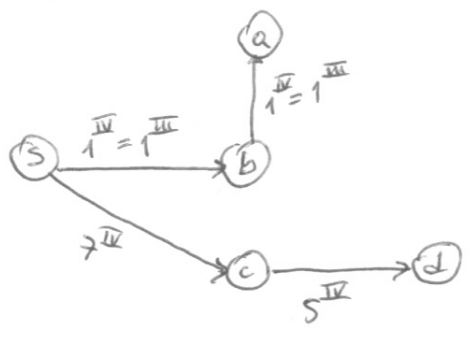
Si aumenta il flusso di $s=1$ su $P_{st}^{III} \Rightarrow$ si modifica le rete residue $\Rightarrow R(x^{III})$

IV)



cammino aumentante
 $P_{st}^{IV}(\delta=1) = (s, c, d, f, t)$
 si aumenta il flusso di 1
 su $P_{st}^{IV} \Rightarrow$ si modifica
 la rete residua $= R(x^{IV})$

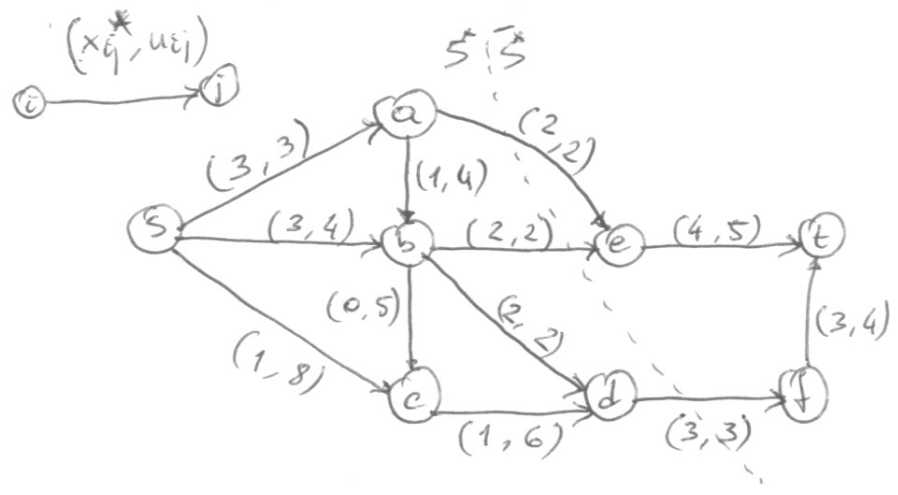
V)



non esiste cammino
 aumentante in $R(x^{IV})$
 STOP!

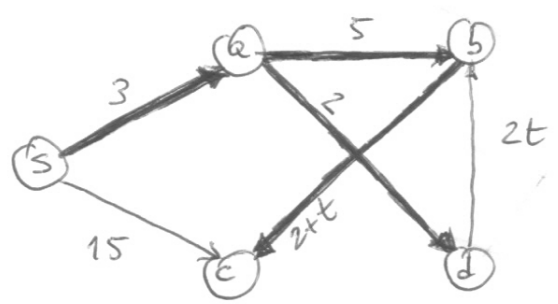
Ricostruzione flusso ottimo $(x^* = x^{IV})$ a partire da $R(x^{IV})$;
 nota che $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$ una possibile scelta è

$$x_{ij} = \max(u_{ij} - r_{ij}, 0), \quad x_{ji} = \max(r_{ij} - u_{ij}, 0)$$



$v^* = 7$
 $u[S^*, \bar{S}^*] = 7$
 $v''[S^*, \bar{S}^*] = 0$

Es. 9



$R = (N, A, c)$

$T = (N, A(T))$

$(i, j) \in A(T) \implies i \rightarrow j$

- Distanze (ottime) d_i in base al dato albero dei cammini minimi T , calcolate imponendo $d_j = d_i + c_{ij} \quad \forall (i, j) \in A(T), \text{ con } d_s = 0$

$i \in N$	s	a	b	c	d
d_i	0	3	8	$10+t$	5

Applicando le cond. di ottim. di Bellman agli archi di $A \setminus A(T)$:

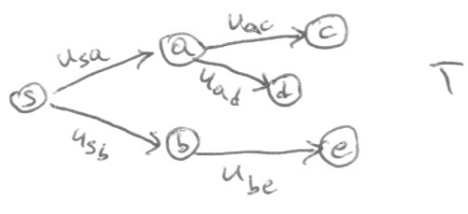
$(s, c) \implies d_c \leq d_s + c_{sc}; \quad 10+t \leq 15; \quad t \leq 5$

$(d, b) \implies d_b \leq d_d + c_{db}; \quad 8 \leq 5 + 2t; \quad t \geq 3/2$

$\boxed{\frac{3}{2} \leq t \leq 5}$

Es. 10

Esempio di $T = (N(T), A(T), u)$ radicata in $s \in N(T)$



Se v_{st}^* il flusso massimo da s a $t \in N(T) \setminus \{s\}$, $v_{st}^* = \min_{(i,j) \in P_{st}} \{u_{ij}\}$

Per cui a) è falso, b) è vero e c) è falsa.

VI)

Non ci sono vertici esposti (non abbinati) di Y
per cui l'elemento M^* è quello massimo M^*
ed è anche Y -completo

L'insieme S_Y^* dei vertici raggiungibili con
cammini alternati da vertici esposti di Y
(incluso questi) è ovviamente $S_Y^* = \emptyset$
in quanto non ci sono vertici esposti di Y
Un minimo vertex cover W^* di B è:

$$W^* = (Y \setminus S_Y^*) \cup (X \cap S_Y^*) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$|M^*| = |W^*| = 5$$

che certifica che M^* è un abbinamento di
cardinalità massima di B

$I^* = (X \cup Y) \setminus W^*$ è un insieme stabile di
cardinalità massima: $I^* = \{a, b, c, d, e, f\}$

- Provare e risolvere nuovamente l'esercizio sul
grafo bipartito $B' = (X \cup Y, E')$ con

$$E' = E \setminus \{(3, d), (3, e)\} \cup \{(2, d)\}.$$

Risultato:

- B' non è Y -completo. Infatti si
può determinare $Q_Y = \{1, 3, 4\}$ che
non rispetta la condizione di Hall (infatti
 $|Q_Y| > |N(Q_Y)|$, dove $N(Q_Y) = \{a, b\}$)
- $M^* = \{(1, b), (2, c), (3, a), (5, e)\}$; $S^* = \{1, 3, 4, a, b\}$
- $W^* = \{2, 5, a, b\}$
- $I^* = \{1, 3, 4, c, d, e, f\}$