ESAME di OTTIMIZZAZIONE - COMPITO A

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale – **1^o anno**

Cognome : **Nome** :

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema:

$$\min_{x\in\Re^2} (3x_1 - x_2 + 2)^3 - 9x_1 + 3x_2$$

(i) Dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione.

(ii) Individuare i punti critici della funzione e la loro natura.

(iii) Nel punto (1 1) calcolare la direzione dell'antigradiente e quella di Newton (se possibile).

Esercizio 2. Si consideri il problema:

$$\min_{x\in S} \quad \frac{1}{2}(3x_1^2 + 12x_1x_2 + 12x_2^2) + 4x_1 + 8x_2$$

(i) Assumendo $S = \Re^2$ dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione ed eventualmente determinarle.

(ii) Si assuma $S = \{x \in \Re^2 : 2x_1 + 4x_2 \geq 8, 3x_1 - 4x_2 \leq 12, x_2 \leq 5\}$. In questo caso:

(a) E'possibile concludere apriori l'esistenza della soluzione?

(b) Scrivere le condizioni di KKT e verificare se il punto (4 0) le soddisfa. Quali conclusioni si possono trarre sul punto?

(c) Effettuare un'iterazione di Frank Wolfe partendo dal punto (2 2), con parametri di Armijo pari a $\Delta = 1$, $\gamma = \delta = \frac{1}{4}$.

Esercizio 3. Sia data la seguente disequazione variazionale:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_1 - 2)^3 + x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 + 2x_2 - 1 \\ 4x_3^3 + 1 \end{pmatrix}, \quad K = \{x \in \Re^3 \,:\, 0 \leq x_1 \leq 1, 2 \leq x_2 \leq 3, x_3 \leq -1\}$$

Rispondere alle seguenti domande:

(i) Dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione.

(ii) Scrivere le condizioni di KKT per questa VI.

(iii) Dire se questa VI è equivalente a un problema di ottimizzazione ed eventualmente determinare un problema equivalente.

(iv) Verificare (in uno qualunque dei modi possibili) se il punto $(0\ 2\ -1)$ è soluzione della VI.

(v) Scrivere la riformulazione di questa VI come sistema di equazioni utilizzando la funzione di Fischer Burmeister.

(vi) Scrivere la riformulazione di questa VI come problema di punto fisso esplicitando la proiezione.

Esercizio 4. Sia dato il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\left(9x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2\right) + x_1 - 20x_2 \\ & -2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \end{array} \tag{1}$$

(i) Scrivere il duale di Wolfe di questo problema.

(ii) Sapendo che la soluzione del problema duale è il punto $(\,0 \quad -8 \quad 5 \quad 33 \quad 0\,)$ verificare se il punto $(\,-6 \quad 10\,)$ è soluzione del problema (1) individuando eventualmente i rispettivi moltiplicatori.

Esercizio 5 Sia dato il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\alpha) \\ & -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq 3 \quad i = 1, \ldots, 4 \end{array} \tag{2}$$

Per ognuno dei seguenti punti dire se sono ottimi o meno, essendo riportato il rispettivo valore del gradiente di $f(\alpha)$ nel punto. Nel caso non siano ottimi individuare il working set di SVM_{light}.

(i) $\bar{\alpha}_1 = (1\ 3\ 1\ 1)$ con

$$\nabla f(\bar{\alpha}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\bar{\alpha}_2 = (3\ 3\ 0\ 0)$.

$$\nabla f(\bar{\alpha}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - COMPITO B

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale – **1° anno**

Cognome : **Nome** :

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema:

$$\min_{x\in\Re^2} (3x_1 - x_2 + 2)^4 - 12x_1 + 4x_2$$

(i) Dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione.

(ii) Individuare i punti critici della funzione e la loro natura.

(iii) Nel punto (1 1) calcolare la direzione dell'antigradiente e quella di Newton (se possibile).

Esercizio 2. Si consideri il problema:

$$\min_{x\in S} \quad \frac{1}{2}(3x_1^2 + 12x_1x_2 + 12x_2^2) + 4x_1 + 6x_2$$

(i) Assumendo $S = \Re^2$ dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione ed eventualmente determinarle.

(ii) Si assuma $S = \{x \in \Re^2 : 2x_1 + 4x_2 \leq 8, 3x_1 - 4x_2 \leq 12, x_1 \geq -4\}$. In questo caso:

(a) E'possibile concludere apriori l'esistenza della soluzione?

(b) Scrivere le condizioni di KKT e verificare se il punto $(-5\ 3/2)$ le soddisfa. Quali conclusioni si possono trarre sul punto?

(c) Effettuare un'iterazione di Frank Wolfe partendo dal punto (0 0), con parametri di Armijo pari a $\Delta = 1$, $\gamma = \delta = \frac{1}{8}$.

Esercizio 3. Sia data la seguente disequazione variazionale:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_1 - 2)^3 + x_1 + x_2 + 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2 \\ 4x_3^3 + 2 \end{pmatrix}, \quad K = \{x \in \Re^3 \,:\, 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq 1, x_3 \leq -1\}$$

Rispondere alle seguenti domande:

(i) Dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione.

(ii) Scrivere le condizioni di KKT per questa VI.

(iii) Dire se questa VI è equivalente a un problema di ottimizzazione ed eventualmente determinare un problema equivalente.

(iv) Verificare (in uno qualunque dei modi possibili) se il punto $(0\ 1\ -1)$ è soluzione della VI.

(v) Scrivere la riformulazione di questa VI come sistema di equazioni utilizzando la funzione di Fischer Burmeister.

(vi) Scrivere la riformulazione di questa VI come problema di punto fisso esplicitando la proiezione.

Esercizio 4. Sia dato il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\left(4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2\right) + x_1 - 20x_2 \\ & -2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \end{array} \tag{3}$$

(i) Scrivere il duale di Wolfe di questo problema.

(ii) Sapendo che la soluzione del problema duale è il punto $(\,-1 \quad 0 \quad 19 \quad 41 \quad 0\,)$ verificare se il punto $(\,-6 \quad 10\,)$ è soluzione del problema (3) individuando eventualmente i rispettivi moltiplicatori.

Esercizio 5 Sia dato il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\alpha) \\ & -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq 2 \quad i = 1, \dots, 4 \end{array} \tag{4}$$

Per ognuno dei seguenti punti dire se sono ottimi o meno, essendo riportato il rispettivo valore del gradiente di $f(\alpha)$ nel punto. Nel caso non siano ottimi individuare il working set di SVM$_{light}$.

(i) $\bar{\alpha}_1 = (1\ 2\ 1\ 0)$ con

$$\nabla f(\bar{\alpha}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\bar{\alpha}_2 = (2\ 2\ 0\ 0)$.

$$\nabla f(\bar{\alpha}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$