

ESAME di OTTIMIZZAZIONE

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale – 1° anno

Cognome :

Nome :

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 3(x_1 - x_2)^3 - 4(x_1 - x_2)$$

- (i) Dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione.
- (ii) Individuare i punti critici della funzione e la loro natura.
- (iii) Nel punto $(1 \ -1)$ calcolare la direzione dell'antigradiente e quella di Newton (se possibile).

Esercizio 2. Si consideri il problema:

$$\min_{x \in S} \frac{1}{2}(x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) + x_1 - x_2$$

- (i) Assumendo $S = \mathbb{R}^2$ dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione ed eventualmente determinarle.
- (ii) Si assuma $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \geq 1, x_1 + x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. In questo caso:
 - (a) E' possibile concludere apriori l'esistenza della soluzione?
 - (b) Scrivere le condizioni di KKT. Verificare se il punto $(0 \ 1)$ soddisfa le condizioni di KKT. Quali conclusioni si possono trarre sul punto?
 - (c) Effettuare un'iterazione del metodo di Frank Wolfe partendo dal punto $(0 \ 4)$, con parametri di Armijo pari a $\Delta = 1, \gamma = \delta = \frac{1}{8}$.

Esercizio 3. Sia data la seguente disequazione variazionale:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 9 \\ 3x_2 + 2x_3 + 1 \\ 3x_1 + 5x_3 - 12 \end{pmatrix}, \quad K = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, -1 \leq x_3 \leq 1\}$$

Rispondere alle seguenti domande:

- (i) Dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione.
- (ii) Scrivere le condizioni di KKT per questa VI.
- (iii) Dire se questa VI è equivalente a un problema di ottimizzazione ed eventualmente determinare un problema equivalente.
- (iv) Verificare (in uno qualunque dei modi possibili) se il punto $(2 \ -1 \ 1)$ è soluzione della VI.

- (v) Scrivere la riformulazione di questa VI come sistema di equazioni utilizzando la funzione di Fischer Burmeister.
- (vi) Scrivere la riformulazione di questa VI come problema di punto fisso esplicitando la proiezione.
- (vi) Quali algoritmi si possono utilizzare per risolvere questa VI?

Esercizio 4. Sia dato il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{1}{2} (x_1^2 + 14x_1x_2 + 49x_2^2) - 10x_1 - 10x_2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & -3x_1 - 4x_2 \leq -12 \\
 & x_1 + x_2 \leq 12
 \end{aligned} \tag{1}$$

- (i) Scrivere il duale di Wolfe di questo problema.
- (ii) Sapendo che la soluzione del problema duale è il punto $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10)$ verificare se il punto $(14 \ -2)$ è soluzione del problema (1) individuando eventualmente i rispettivi moltiplicatori.

Esercizio 5 Sia dato il seguente problema:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(\alpha) \\
 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\
 & 0 \leq \alpha_i \leq 2 \quad i = 1, \dots, 4
 \end{aligned} \tag{2}$$

Supponiamo che nel punto $\bar{\alpha} = (1 \ 1 \ 0 \ 2)$, il gradiente della funzione valga:

$$\nabla f(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} -1 \\ \beta \\ \gamma \\ -2 \end{pmatrix}$$

- (i) Per quali valori di β e γ il punto $\bar{\alpha}$ è ottimo?
- (ii) Per quali valori di β e γ il working set di SVM_{light} è $\{2, 3\}$?