ESAME di OTTIMIZZAZIONE

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale – **1º anno**

Cognome : **Nome** :

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema:

$$\min_{x \in \Re^2} (x_1 - 1)^3 - x_1 x_2^2$$

(i) Dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione.

(ii) Individuare i punti critici della funzione e la loro natura.

(iii) Nel punto (1 1) calcolare la direzione dell'antigradiente e quella di Newton (se possibile).

Esercizio 2. Si consideri il problema:

$$\min_{x \in S} \quad \frac{1}{2}(6x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2) - 8x_2$$

(i) Assumendo $S = \Re^2$ dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione ed eventualmente determinarle.

(ii) Si assuma $S = \{x \in \Re^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4, -x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \leq 2\}$. In questo caso:

(a) E'possibile concludere apriori l'esistenza della soluzione?

(b) Scrivere le condizioni di KKT. Verificare se il punto (0 1) soddisfa le condizioni di KKT. Quali conclusioni si possono trarre sul punto?

(c) Effettuare un'iterazione del metodo del gradiente proiettato partendo dal punto (0 0), con $s = 1/2$ e parametri di Armijo pari a $\Delta = 1$, $\gamma = \delta = \frac{1}{4}$.

Esercizio 3. Sia dato un gioco di Nash a due giocatori. Il primo giocatore controlla la variabile x_1, il secondo controlla le variabili x_2 e x_3. I problemi dei due giocatori sono:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1} \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 & \min\limits_{x_2,x_3} 2x_1x_2 + 3x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_2x_3 - 6x_3 \\ -1 \leq x_1 \leq 1 & -2 \leq x_2 \leq 2,\ 0 \leq x_3 \leq 2 \end{array}$$

Rispondere alle seguenti domande:

(i) Scrivere la VI equivalente a questo gioco di Nash spiegando perchè è possibile scriverla.

(ii) Dire se applicando il teorema di esistenza di equilibri per un gioco di Nash è possibile concludere apriori l'esistenza di una soluzione.

(iii) Data la VI equivalente, verificare se è possibile tramite essa concludere l'esistenza e/o l'unicità della soluzione.

(iv) Dire se questo gioco è equivalente a un problema di ottimizzazione ed eventualmente determinare un problema equivalente.

(v) Scrivere le condizioni di KKT per la VI equivalente.

(vi) Scrivere la riformulazione di questa VI come problema di punto fisso esplicitando la proiezione.

(vii) Verificare se il punto $(-1\ 0\ 2)^T$ è un equilibrio di Nash (esistono più modi equivalenti, vanno bene tutti).

Esercizio 4. Sia dato il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\left(9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2\right) - 60x_1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -3x_1 - 4x_2 \leq -12 \\ & x_1 \leq 6 \end{array} \tag{1}$$

(i) Scrivere il duale di Wolfe di questo problema.

(ii) Sapendo che la soluzione del problema duale è il punto $(\,0 \quad 15/2 \quad 0 \quad 15/2 \quad 75/2\,)$ verificare se il punto $(\,6 \quad -3/2\,)$ è soluzione del problema (1) individuando eventualmente i rispettivi moltiplicatori.

Esercizio 5 Sia dato il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\alpha) \\ & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq 2 \quad i = 1, \ldots, 4 \end{array} \tag{2}$$

Supponiamo che nel punto $\bar{\alpha} = (1\ 2\ 3\ 0)$, il gradiente della funzione valga:

$$\nabla f(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} -3 \\ \beta \\ \gamma \\ -2 \end{pmatrix}$$

(i) Per quali valori di β e γ il punto $\bar{\alpha}$ è ottimo?

(ii) Per quali valori di β e γ il working set di SVM$_{light}$ è $\{3, 2\}$?