ESAME di OTTIMIZZAZIONE - COMPITO A

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale – **1° anno**

Cognome : **Nome** :

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema:

$$\min_{x\in\Re^2} \left(2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 + 3x_2\right)^2$$

(i) Dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione.

(ii) Individuare i punti critici della funzione e la loro natura.

(iii) Nel punto (1 1) calcolare la direzione dell'antigradiente e quella di Newton (se possibile).

Esercizio 2. Si consideri il problema:

$$\min_{x\in S} \quad \tfrac{1}{2}(12x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) + 4x_1 - 15x_2$$

(i) Assumendo $S = \Re^2$ dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione ed eventualmente determinarle.

(ii) Si assuma $S = \{x \in \Re^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1, 3x_1 + 3x_2 \ge 1, x_1 \ge 0\}$. In questo caso:

(a) E'possibile concludere apriori l'esistenza della soluzione?

(b) Scrivere le condizioni di KKT. Il punto (0 1) è regolare? Verificare se il punto (0 1) soddisfa le condizioni di KKT. Quali conclusioni si possono trarre sul punto?

(c) Effettuare un'iterazione del gradiente proiettato partendo dal punto (0 1/2), con $s = 1/7$ e parametri di Armijo pari a $\Delta = 1$, $\gamma = \delta = \frac{1}{4}$.

Esercizio 3. Sia dato un gioco di Nash a due giocatori. Il primo giocatore controlla le variabili x_1 e x_2, il secondo controlla la variabile x_3. I problemi dei due giocatori sono:

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\min_{x_1,x_2} \frac{1}{2}(4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 - 5x_2 & \displaystyle\min_{x_3} x_3^2 + 3x_1x_3 - x_2x_3 + 5x_3 \\
-1 \le x_1 \le 1 & x_3 \le -1 \\
1 \le x_2 \le 2 &
\end{array}$$

Rispondere alle seguenti domande:

(i) Scrivere la VI equivalente a questo gioco di Nash spiegando perchè è possibile scriverla.

(ii) Dire se applicando il teorema di esistenza di equilibri per un gioco di Nash è possibile concludere apriori l'esistenza di una soluzione.

(iii) Data la VI equivalente, verificare se è possibile tramite essa concludere l'esistenza e/o l'unicità della soluzione.

(iv) Scrivere le condizioni di KKT per la VI equivalente.

(iv) Scrivere la riformulazione di questa VI come problema di punto fisso esplicitando la proiezione.

(v) Scrivere la riformulazione di questa VI come sistema di equazioni utilizzando la funzione di Fischer-Burmeister.

(vi) Verificare se il punto $(0\,2,\,-1)^T$ è un equilibrio di Nash (esistono più modi equivalenti, vanno bene tutti).

Esercizio 4. Sia dato il seguente insieme di dati:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} = \ & \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, 1 \right), \right. \\ & \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, -1 \right), \left(\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, -1 \right), \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, -1 \right), \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, -1 \right), \\ & \left. \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, -1 \right), \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, -1 \right) \right\}\end{aligned}$$

e si supponga di voler costruire una SVM per risolvere il corrispondente problema di classificazione utilizzando il kernel lineare ($k(x_i, x_j) = x_i^T x_j$).

(i) Scrivere il problema duale che deve essere risolto per addestrare la SVM (con parametro $C = 10000$).

(ii) Sapendo che la soluzione del problema duale ‘e la seguente (approssimata alla seconda cifra decimale):

$$\lambda = \begin{pmatrix} 6.78 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.67 \end{pmatrix}$$

individuare i vettori di supporto, calcolare l’iperpiano di separazione ottimo $w^T x + b$ e dire quali valori delle variabili ξ_i possono essere determinati.

(iii) Come classifica la SVM così addestrata il punto $x^T = (0\ 1)$?

(iv) E’ possibile dedurre la separabilità lineare dei due insiemi di dati?Quanto vale l’errore sul training set?

(iv) Supponendo di invertire l'uscita del punto $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ la soluzione del duale diventa:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 10000 \\ 1904.9 \\ 10000 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \\ 7619.08 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4285.82 \end{pmatrix}$$

Che cosa si può concludere guardando questa soluzione?Quanti punti al massimo possono essere mal classificati in questo caso?Che cosa ci si aspetta usando il kernel gaussiano?

Esercizio 5 Sia dato il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\alpha) \\ & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq 2 \quad i = 1, \ldots, 4 \end{array} \tag{1}$$

Per ognuno dei seguenti punti dire se sono ottimi o meno, essendo riportato il rispettivo valore del gradiente di $f(\alpha)$ nel punto. Nel caso non siano ottimi individuare il working set di SVM$_{light}$.

(i) $\bar{\alpha}_1 = (0\ 1\ 1\ 0)$ con

$$\nabla f(\bar{\alpha}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\bar{\alpha}_2 = (1\ 0\ 1\ 2)$.

$$\nabla f(\bar{\alpha}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - COMPITO B

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale – **1º anno**

Cognome : **Nome** :

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema:

$$\min_{x\in\Re^2} \left(4x_1^2+2x_2^2+4x_1-2x_2\right)^2$$

(i) Dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione.

(ii) Individuare i punti critici della funzione e la loro natura.

(iii) Nel punto (1 1) calcolare la direzione dell'antigradiente e quella di Newton (se possibile).

Esercizio 2. Si consideri il problema:

$$\min_{x\in S} \quad \tfrac{1}{2}(3x_1^2+12x_1x_2+12x_2^2)+4x_1+6x_2$$

(i) Assumendo $S=\Re^2$ dire se è possibile concludere apriori esistenza e/o unicità della soluzione ed eventualmente determinarle.

(ii) Si assuma $S=\{x\in\Re^2 : x_1^2+x_2^2\le 1, 3x_1+3x_2\le 1, x_2\ge 0\}$. In questo caso:

(a) E'possibile concludere apriori l'esistenza della soluzione?

(b) Scrivere le condizioni di KKT. Il punto $(-1\ 0)$ è regolare?Soddisfa le condizioni di KKT? Quali conclusioni si possono trarre sul punto?

(c) Effettuare un'iterazione del gradiente proiettato partendo dal punto (0 0), con $s=1/2$ e parametri di Armijo pari a $\Delta=1$, $\gamma=\delta=\frac{1}{8}$.

Esercizio 3. Sia dato un gioco di Nash a due giocatori. Il primo giocatore controlla le variabili x_1 e x_2, il secondo controlla la variabile x_3. I problemi dei due giocatori sono:

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x_1,x_2} \dfrac{1}{2}(5x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2)-2x_1x_3-x_2x_3-4x_1 & \min\limits_{x_3} \dfrac{1}{2}x_3^2+4x_1x_3+x_2x_3-2x_3 \\ -1\le x_1\le 1 & x_3\le -1 \\ 1\le x_2\le 2 & \end{array}$$

Rispondere alle seguenti domande:

(i) Scrivere la VI equivalente a questo gioco di Nash spiegando perchè è possibile scriverla.

(ii) Dire se applicando il teorema di esistenza di equilibri per un gioco di Nash è possibile concludere apriori l'esistenza di una soluzione.

(iii) Data la VI equivalente, verificare se è possibile tramite essa concludere l'esistenza e/o l'unicità della soluzione.

(iv) Scrivere le condizioni di KKT per la VI equivalente.

(iv) Scrivere la riformulazione di questa VI come problema di punto fisso esplicitando la proiezione.

(v) Scrivere la riformulazione di questa VI come sistema di equazioni utilizzando la funzione di Fischer-Burmeister.

(vi) Verificare se il punto $(0\,1,\,-1)^T$ è un equilibrio di Nash (esistono più modi equivalenti, vanno bene tutti).

Esercizio 4. Sia dato il seguente insieme di dati:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} = \ & \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, 1 \right), \right. \\ & \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, -1 \right), \left(\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, -1 \right), \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, -1 \right), \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, -1 \right), \\ & \left. \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, -1 \right), \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, -1 \right) \right\}\end{aligned}$$

e si supponga di voler costruire una SVM per risolvere il corrispondente problema di classificazione utilizzando il kernel lineare ($k(x_i, x_j) = x_i^T x_j$).

(i) Scrivere il problema duale che deve essere risolto per addestrare la SVM (con parametro $C = 10000$).

(ii) Sapendo che la soluzione del problema duale ‘e la seguente (approssimata alla seconda cifra decimale):

$$\lambda = \begin{pmatrix} 3.11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.78 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.67 \end{pmatrix}$$

individuare i vettori di supporto, calcolare l'iperpiano di separazione ottimo $w^T x + b$ e dire quali valori delle variabili ξ_i possono essere determinati.

(iii) Come classifica la SVM così addestrata il punto $x^T = (-1\ 1)$?

(iv) E' possibile dedurre la separabilità lineare dei due insiemi di dati?Quanto vale l'errore sul training set?

(iv) Supponendo di invertire l'uscita del punto $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ la soluzione del duale diventa:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 7619.08 \\ 1904.9 \\ 10000 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4285.82 \end{pmatrix}$$

Che cosa si può concludere guardando questa soluzione?Quanti punti al massimo possono essere mal classificati in questo caso?Che cosa ci si aspetta usando il kernel gaussiano?

Esercizio 5 Sia dato il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\alpha) \\ & -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq 2 \quad i = 1, \dots, 4 \end{array} \tag{2}$$

Per ognuno dei seguenti punti dire se sono ottimi o meno, essendo riportato il rispettivo valore del gradiente di $f(\alpha)$ nel punto. Nel caso non siano ottimi individuare il working set di SVM$_{light}$.

(i) $\bar{\alpha}_1 = (1\ 0\ 0\ 1)$ con

$$\nabla f(\bar{\alpha}_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(ii) $\bar{\alpha}_2 = (1\ 2\ 1\ 0)$.

$$\nabla f(\bar{\alpha}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$